

REGRASP PLANNING OF A POLYGON IN THE PLANE FOR A FOUR-FINGERED HAND

Mr. Thanathorn Phoka

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Computer Engineering

Department of Computer Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2003

ISBN 974-17-5220-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวางแผนการเปลี่ยนการจับวัตถุหลายเหลี่ยมบนระนาบด้วยมือที่มีสี่นิ้ว
โดย นายธนธร พอค้า
สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.อรรถวิทย์ สุดแสง

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.อรรถวิทย์ สุดแสง)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.มนูกิจ พานิชกุล)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.วิทยา วัฒนสุโขประสิทธิ์)

ธนรร พอค้ำ : การวางแผนการเปลี่ยนการจับวัตถุหลายเหลี่ยมบนระนาบด้วยมือที่มีสี่นิ้ว (REGRASP PLANNING OF A POLYGON IN THE PLANE FOR A FOUR-FINGERED HAND). อาจารย์ที่ปรึกษา : อ.ดร.อรรถวิทย์ สุดแสง, 71 หน้า. ISBN 974-17-5220-2.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีคำนวณลำดับของการวางตำแหน่งของนิ้วหุ่นยนต์จับวัตถุหลายเหลี่ยมในสองมิติเพื่อเปลี่ยนคอนฟิกูเรชันของการจับ จากคอนฟิกูเรชันเริ่มต้นไปยังคอนฟิกูเรชันที่ต้องการ โดยในระหว่างกระบวนการเปลี่ยนแปลงคอนฟิกูเรชันนี้ การจับยังคงคุณสมบัติฟอร์ซโคลสเซอร์ตลอดทั้งกระบวนการ มือหุ่นยนต์ที่ใช้ในการคำนวณประกอบไปด้วยสี่นิ้วแข็งที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ โดยแรงเสียดทานระหว่างนิ้วและวัตถุที่จุดสัมผัสถูกสมมุติว่าเป็นไปตามกฎของคูลอมบ์ หัวใจสำคัญของวิธีที่นำเสนออยู่ที่การสร้างโครงสร้างข้อมูลชื่อเรียกว่า กราฟการสลับนิ้ว การเชื่อมต่อกันในกราฟนี้บ่งบอกถึงความสามารถในการเปลี่ยนการจับระหว่างคู่ของคอนฟิกูเรชันใด ๆ ในขณะที่ยังรักษาเสถียรภาพด้วยการคงคุณสมบัติฟอร์ซโคลสเซอร์ อันเป็นผลทำให้สามารถแก้ปัญหาการคำนวณลำดับการวางนิ้วที่เหมาะสมด้วยการค้นในกราฟนี้

ภาควิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา 2546

ลายมือชื่อนิสิต.....
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

4570343321 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING

KEY WORD: REGRASPING / DEXTEROUS MANIPULATION / FORCE-CLOSURE GRASP

THANATHORN PHOKA : REGRASP PLANNING OF A POLYGON IN THE PLANE
 FOR A FOUR-FINGERED HAND. THESIS ADVISOR : ATTAWITH SUDSANG,
 Ph.D., 71 pp. ISBN 974-17-5220-2.

This thesis proposes an approach for computing a sequence of finger repositioning that allows a 4-fingered hand to switch from one grasping configuration to another while maintaining a force-closure grasp of a polygon during the entire process. This thesis assume the free-motion hard fingers and Coulomb friction at contact points. The main idea of the proposed approach is based on exploring a structure called switching graph. The connectivity of this structure captures ability to switch form one grasp to another and allows regrasp planning to be formulated as a graph search.

Department Computer Engineering Student's signature.....
 Field of study Computer Engineering Advisor's signature.....
 Academic year 2003 Co-advisor's signature.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างสูงจาก อ. ดร. อรรถวิทย์ สุดแสง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ คำแนะนำ และข้อคิดเห็นต่าง ๆ ในการวิจัย รวมถึงการดำเนินชีวิต ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและปลาบปลื้มในความโอบอ้อมอารีเป็นอย่างมาก และขอขอบคุณคณะกรรมการวิทยานิพนธ์ รศ. ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา รศ. ดร.มนูกิจ พานิชกุล และ อ. ดร.วิทยา วัฒนสุโขประสิทธิ์ ที่กรุณาเสียสละเวลาให้คำแนะนำ ตรวจสอบและแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบคุณพี่แฉ่ ที่ให้คำแนะนำในเรื่องต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นเรื่องงานวิจัย วิทยานิพนธ์ ให้คำปรึกษาปัญหาชีวิต สหายกอล์ฟและสหายท่านอื่นที่อยู่เป็นเพื่อนร่วมกันตั้งแต่เริ่มศึกษาปริญญาโท

สำหรับนามธรรม ผู้วิจัยขอขอบคุณทุกอุปสรรค ที่ทำให้ผู้วิจัยมีประสบการณ์ มีความแข็งแกร่ง และทำให้รู้ซึ่งถึงความอึดอ้อมใจเมื่อสามารถฟันฝ่าอุปสรรค เพื่อมุ่งไปสู่ความสำเร็จ ขอขอบคุณทุกตัวอักษรในอินเทอร์เน็ตที่ตักเตือน และให้กำลังใจเวลาท้อแท้ ผู้วิจัยขอขอบคุณความรู้สึที่ดี ๆ ที่มีให้ผู้วิจัย ทำให้ผู้วิจัยได้รับรู้ว่าชีวิตของผู้วิจัยยังมีความหมาย และมีค่ามากเพียงใด

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่กราบขอพระคุณบิดา มารดา และญาติพี่น้องที่คอยสนับสนุนผู้วิจัยด้านการศึกษาดังแต่้วยเยาว์ อีกทั้งยังให้กำลังใจและแนะนำสิ่งที่ดีให้แก่ผู้วิจัยเสมอมา จนสามารถผลิตผลงานวิจัยที่เป็นประโยชน์ด้านการศึกษาไม่มากก็น้อย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ (ภาษาไทย).....	ง
บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ (ภาษาอังกฤษ).....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
บทที่ 2 งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	7
2.2.1 การจับและความเสียดทาน.....	8
2.2.2 สภาพสมดุลของการจับและคุณสมบัติฟอรัชโคลสเซอร์.....	9
2.2.3 เงื่อนไขในการจับวัตถุหลายเหลี่ยมในสภาพสมดุล.....	10
บทที่ 3 กราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	15
3.1 ตัวอย่างลำดับของการเปลี่ยนนิ้ว.....	15
3.2 การแทนการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	17
3.3 การสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	18
3.4 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	19
3.5 การคำนวณหากราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	20
บทที่ 4 กราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบขนาน.....	23
4.1 กราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว.....	23
4.1.1 การแทนการจับด้วยสองนิ้ว.....	24
4.1.2 การสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว.....	25
4.1.3 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว.....	26

4.1.4	การคำนวณหากราฟการสลับนิวสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว	28
4.2	กราฟการสลับนิวสำหรับการจับแบบขนาน	29
4.2.1	เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการจับแบบขนาน	30
4.2.2	การสลับนิวสำหรับการจับแบบขนาน	33
4.2.3	การจัดวางนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน	38
4.2.4	การคำนวณหากราฟการสลับนิวสำหรับการจับแบบขนาน	38
บทที่ 5	การทดลองและผลการทดลอง.....	41
5.1	วิธีการทดลอง	41
5.2	ผลการทดลอง.....	42
5.3	วิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง	49
บทที่ 6	สรุปการวิจัย ข้อเสนอแนะ และงานวิจัยในอนาคต	51
6.1	สรุปการวิจัย	51
6.2	ข้อเสนอแนะ	55
6.3	งานวิจัยในอนาคต.....	55
	รายการอ้างอิง.....	56
	ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	60

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 1 ผลการทดลองสำหรับการจับคอนเคอร์เรนซ์	42
ตารางที่ 2 ผลการทดลองสำหรับการจับแบบขนาน	43
ตารางที่ 3 ผลการทดลองสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์และการจับด้วยสองนิ้ว	43
ตารางที่ 4 ผลการทดลองสำหรับการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว	44
ตารางที่ 5 ผลการทดลองสำหรับการจับทุกแบบ	44

สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 1 แรงเสียดทานตามกฎของคูลอมบ์	9
รูปที่ 2 การจับด้วยนิ้วจำนวนสองนิ้ว.....	11
รูปที่ 3 การจับด้วยนิ้วจำนวน 3 นิ้ว.....	12
รูปที่ 4 การจับด้วยนิ้วจำนวน 3 นิ้วในแบบต่าง ๆ ที่เป็นไปตามทฤษฎีบท 4.....	13
รูปที่ 5 การจับด้วยนิ้วสามนิ้วแบบขนาน	13
รูปที่ 6 การสแกนทางบวกด้วยมุม θ ของเวกเตอร์สามเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^2	14
รูปที่ 7 ตัวอย่างลำดับของการจับ	16
รูปที่ 8 ไฟกัซเซลล์สำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	18
รูปที่ 9 การสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	19
รูปที่ 10 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	20
รูปที่ 11 การเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของสามด้านสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	22
รูปที่ 12 แผนภาพการสลับนิ้ว	23
รูปที่ 13 การสร้างไฟกัซเซลล์สำหรับการจับด้วยสองนิ้ว	25
รูปที่ 14 การสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์.....	26
รูปที่ 15 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว	27
รูปที่ 16 การเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของสองด้านสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว.....	29
รูปที่ 17 การตัดกันของกรวยเสียดทานสองด้านสำหรับการจับแบบขนาน.....	31
รูปที่ 18 ระนาบด้านซ้ายและด้านขวาที่จุด \mathbf{x}_0	31
รูปที่ 19 การกำหนดชื่อของจุดสัมผัสสำหรับการจับแบบขนาน	32
รูปที่ 20 การทดสอบเซตของการจับแบบขนาน	33
รูปที่ 21 การสลับจุดสัมผัสกลาง.....	34
รูปที่ 22 การสลับจุดสัมผัสที่ไม่ใช่จุดสัมผัสกลาง.....	34
รูปที่ 23 การสลับจุดสัมผัสที่ไม่ใช่จุดสัมผัสกลางแต่เปลี่ยนสถานะของจุดสัมผัสกลาง	35
รูปที่ 24 การเปลี่ยนการแทนการจับด้วยสองนิ้วจากจุดบนระนาบเป็นการแทนการจับด้วย ตำแหน่งบนด้าน	36
รูปที่ 25 การสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบขนานเมื่อทั้งสองการจับมีด้าน ร่วมกันสองด้าน	36

รูปที่ 26 การคำนวณตำแหน่งในการสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้ว และการจับแบบขนาน.. 37

รูปที่ 27 การสลับนิ้วเพื่อสลักสถานะของจุดสัมผัสซ้ายและจุดสัมผัสขวา..... 39

รูปที่ 28 การเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของสองด้านสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว..... 40

รูปที่ 29 วัตถุหลายเหลี่ยมที่ใช้ในการทดลอง 41

รูปที่ 30 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ 46

รูปที่ 31 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบขนาน..... 47

รูปที่ 32 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบคอนเคอร์เรนท์และการจับด้วย
สองนิ้ว..... 47

รูปที่ 33 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว. 48

รูปที่ 34 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับทุกแบบ 49

บทที่ 1

บทนำ

เป้าหมายสำคัญประการหนึ่งของการใช้งานหุ่นยนต์คือการจับวัตถุ (object manipulation) ในบริเวณทำงานของหุ่นยนต์ (robot workspace) วิธีพื้นฐานซึ่งได้รับความสนใจในทางวิทยาการหุ่นยนต์คือการจับ (grasping) ด้วยมือหุ่นยนต์ คอนฟิกูเรชัน (configuration) ของการจับประกอบไปด้วยตำแหน่งของนิ้วหุ่นยนต์บนวัตถุ เมื่อวัตถุถูกจับอย่างมีเสถียรภาพนั้น คอนฟิกูเรชันของการจับจะต้องไม่เปลี่ยนแปลงตลอดการทำงานไม่ว่าจะถูกรบกวนจากแรงภายนอกใด ๆ หมายความว่าตำแหน่งของนิ้วเมื่อเทียบกับวัตถุจะถูกกำหนดตายตัว ส่งผลให้สามารถเคลื่อนย้ายวัตถุที่ถูกจับด้วยการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ข้อต่อของท่อนแขนส่วนอื่นๆ เช่น หมุนข้อมือ หรือข้อศอก เป็นต้น อย่างไรก็ตามการจับเพียงอย่างเดียวอาจไม่เพียงพอหรือไม่มีประสิทธิภาพในบางสถานการณ์ เช่นเมื่อเราเขียนหนังสือผิดและต้องการใช้ยางลบที่ติดอยู่ที่ปลายดินสอ เราไม่ต้องการที่จะวางดินสอแท่งนั้นลงบนโต๊ะ แล้วหยิบขึ้นมาใหม่ด้วยคอนฟิกูเรชันของการจับที่ทำให้เราใช้ยางลบได้สะดวก เราอาจไม่ต้องการที่จะบิดข้อมือและข้อศอกเหมือนไม่เป็นธรรมชาติเพื่อที่จะใช้ยางลบ สิ่งที่เราคุ้นเคยคือการหมุนดินสอแท่งนั้นเพื่อใช้ยางลบที่อยู่ปลายอีกด้านแล้วจึงหมุนดินสอกลับเพื่อเขียนต่อ การจับวัตถุในมือ (in-hand manipulation) นับเป็นความสามารถสำคัญอย่างหนึ่งของมนุษย์ที่นักวิทยาศาสตร์พยายามถ่ายทอดให้กับหุ่นยนต์ วิธีหนึ่งในการจับวัตถุในมือก็คือการเปลี่ยนคอนฟิกูเรชันของการจับ (regrasping) ด้วยการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วในขณะที่ยังรักษาเสถียรภาพของการจับไว้

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาปัญหาการคำนวณการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วเพื่อเปลี่ยนคอนฟิกูเรชันของการจับวัตถุหลายเหลี่ยมในสองมิติด้วยมือที่มี 4 นิ้ว โดยนิ้วที่ใช้ในการจับถูกกำหนดให้เป็นนิ้วแข็งที่สามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ และมีความเสียดทานที่จุดสัมผัสระหว่างนิ้วกับวัตถุเป็นไปตามกฎของคูลอมบ์ (Coulomb friction) วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีที่จะหาลำดับของการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วจากการจับเริ่มต้นเพื่อเปลี่ยนไปเป็นการจับที่ต้องการ โดยในขณะที่ดำเนินการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วอยู่นั้น การจับยังคงรักษาเสถียรภาพด้วยการควบคุมสมบัติฟอร์ซโคลสเชอร์ (force closure) อยู่ตลอดเวลา แนวคิดหลักของวิธีที่นำเสนอนี้จะทำการแปลงปัญหาการวางนิ้วไปเป็นโครงสร้างข้อมูลที่จะขอเรียกว่า *กราฟการสลับนิ้ว (finger switching graph)* การเชื่อมต่อกันในโครงสร้างนี้แสดงถึงความสามารถที่จะทำการเปลี่ยนการจับแบบหนึ่งไปเป็นการจับแบบอื่น ทำให้สามารถแก้ปัญหาการวางแผนเปลี่ยนการจับด้วยการค้นในกราฟได้

ถึงแม้ว่าวิธีที่นำเสนอพิจารณาตำแหน่งจุดสัมผัสโดยไม่คำนึงถึงข้อกำหนดทางจลนศาสตร์ของนิ้ว (finger kinematics) การแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยการค้นในกราฟก็ทำให้เราสามารถเพิ่มข้อกำหนดทางจลนศาสตร์ หรือข้อกำหนดอื่นๆ ได้โดยสะดวกด้วยการรวมข้อกำหนดเหล่านี้เข้ากับกติกาในการค้น การสร้างกราฟการสลับนิ้วอยู่บนพื้นฐานทางทฤษฎีการจับที่ทำให้เราสามารถแทนเซตของการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ซโคลสเซอร์ด้วยพื้นที่บนระนาบ และสามารถระบุการสลับนิ้วที่เป็นไปได้จากพื้นที่ซึ่งทับซ้อนกันได้ (แต่ละพื้นที่จะถูกแทนด้วยจุดยอดในกราฟและการทับซ้อนกันของพื้นที่จะถูกแทนด้วยเส้นเชื่อม) คุณสมบัติของงานวิจัยนี้ที่แตกต่างอย่างเด่นชัดจากงานวิจัยอื่นๆ เกี่ยวกับการคำนวณหาลำดับการเปลี่ยนนิ้ว คือความสามารถในการให้คำตอบเป็นเซตของลำดับการเปลี่ยนนิ้ว (แทนที่จะให้เพียงหนึ่งลำดับ) คุณสมบัตินี้ถ่ายทอดโดยตรงจากการสร้างกราฟการสลับนิ้ว ที่กำหนดให้แต่ละจุดยอดในกราฟแทนเซตของการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ซโคลสเซอร์ เซตของลำดับที่เป็นคำตอบทำให้ผู้ใช้สามารถเลือกคำตอบที่เหมาะสมได้โดยไม่ต้องทำการคำนวณซ้ำอีกครั้ง วิธีที่นำเสนอพิจารณาปัญหาการวางแผนการวางนิ้วในมุมมองทางเรขาคณิต ถึงแม้ว่าจะมีศักยภาพที่จะได้วิธีแก้ปัญหามีประสิทธิภาพ ก็ยังต้องนำไปประยุกต์ใช้ประกอบกับมาตรการในการเลือกการจับและลำดับการเปลี่ยนการจับที่เหมาะสม อันจะสะท้อนความต้องการที่แท้จริงของงานที่พิจารณา การเลือกลำดับที่เหมาะสมหรือแม้แต่การเลือกการจับที่เหมาะสม เป็นอีกปัญหาที่ได้รับความสนใจจากนักวิจัย และยังคงได้รับการค้นคว้าอย่างจริงจังก่อนที่จะสามารถนำการวางแผนการจัดวัตถุในมือไปประยุกต์ใช้จริงในทางปฏิบัติ

เนื้อหาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถูกแบ่งออกเป็น 6 บทดังนี้ คือ บทที่ 1 เป็นบทนำซึ่งกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่วิทยานิพนธ์นี้ให้ความสนใจ บทที่ 2 จะกล่าวถึงงานวิจัยและทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง คือ ความเสียดทานคูลอมบ์ สภาพสมดุลของการจับ คุณสมบัติฟอร์ซโคลสเซอร์ เงื่อนไขสำหรับการจับด้วยสองนิ้วและสามนิ้ว ก่อนที่จะกล่าวถึงโครงสร้างกราฟการสลับนิ้ว ในบทที่ 3 เริ่มต้นด้วยการแสดงตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วเพื่อให้เห็นถึงภาพรวมของงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ ตามด้วยโครงสร้างกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ ซึ่งประกอบไปด้วยส่วนย่อย ๆ คือ การแทนการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ที่อาศัยทฤษฎีเกี่ยวกับบริเวณสัมผัสอิสระเพื่อระบุคอนฟิกูเรชันของการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ด้วยจุดบนระนาบ การสลับนิ้วซึ่งจะสามารถทำได้เมื่อเซตของการจับที่มีด้านต่างกันหนึ่งด้านมีส่วนที่ซ้อนทับกัน การจัดวางนิ้วซึ่งเป็นกระบวนการที่กระทำได้เสมอในการเปลี่ยนการจับในเซตเดียวกัน และการสร้างกราฟการสลับนิ้วโดยอาศัยเงื่อนไขสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์เพื่อหาด้านสามด้านที่จะนำมาคำนวณเซตของการจับ บทที่ 4 เสนอการคำนวณหากราฟการสลับนิ้วสำหรับการ

จับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว โดยมีลำดับการนำเสนอเช่นเดียวกับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ แต่จะต่างกันตรงที่การแทนการจับแบบขนานใช้ตำแหน่งบนด้านทั้งสามเพื่อระบุคอนฟิกูเรชันของการจับ นอกจากนี้การจับด้วยสองนิ้วยังจะเป็นจุดเชื่อมโยงระหว่างการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ และการจับแบบขนาน ซึ่งการจับทั้งสองแบบนี้ไม่สามารถทำการเปลี่ยนการจับระหว่างกันได้โดยตรง ส่วนบทที่ 5 จะกล่าวถึงการทดลอง ผลการทดลองซึ่งจะแสดงผลของกราฟการสลับนิ้วที่คำนวณได้ รวมถึงตัวอย่างในการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วที่ได้จากการจำลองการทดลอง และสิ้นสุดบทนี้ด้วยการวิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง โดยมุ่งเน้นในส่วนขององค์ประกอบที่ต่อเนื่องกันในกราฟการสลับนิ้ว ส่วนท้ายสุดของวิทยานิพนธ์ในบทที่ 6 จะกล่าวถึงบทสรุปของการวิจัย ข้อเสนอแนะ รวมถึงแนวทางในการทำวิจัยในอนาคต

บทที่ 2

งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยเกี่ยวกับการจับ และการจัดวัตถุในมือหุ่นยนต์ (dexterous in-hand manipulation) เป็นงานวิจัยที่มีความสำคัญควบคู่มากับการวิจัยทางด้านวิทยาการหุ่นยนต์ องค์ประกอบที่สำคัญของงานวิจัยทางด้านนี้คือมือหุ่นยนต์ มือหุ่นยนต์ถูกสร้างและพัฒนาขึ้นโดยมีจุดประสงค์หลักเพื่อนำมาใช้ในการจัดวัตถุ และในขณะเดียวกันความต้องการทำให้มือหุ่นยนต์นั้นมีขนาดและลักษณะคล้ายมือมนุษย์ก็เป็นสิ่งที่ได้รับความสนใจเช่นกัน มือหุ่นยนต์ที่เป็นต้นแบบและออกแบบมาเพื่อให้คล้ายมือของมนุษย์คือ มือยูทาร์และเอ็มไอที [1] เป็นมือที่มีสรีระนิ้ว แต่มีขนาดใหญ่เนื่องจากตำแหน่งของตัวกำเนิดแรงของนิ้ว (actuator) อยู่ภายนอกมือหุ่นยนต์ มือโรโบนอท [2] เป็นมือที่มีหัวนิ้ว ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อการใช้งานในอวกาศ ตำแหน่งของตัวกำเนิดแรงของนิ้วอยู่ภายนอกเช่นเดียวกับมือยูทาร์และเอ็มไอทีแต่มีขนาดเล็กกว่า มือดีแอลอาร์สอง [3] เป็นมือรุ่นที่สองของมือดีแอลอาร์ มีนิ้วจำนวนสี่นิ้ว ใช้มอเตอร์ซึ่งอยู่ภายในมือเป็นตัวกำเนิดแรงให้กับนิ้ว ทำให้ขนาดของมือหุ่นยนต์นั้นไม่ใหญ่มาก แต่น้ำหนักตรงส่วนมือสูง และโครงสร้างภายในนิ้วมีความซับซ้อน ดังนั้นงานวิจัย [4] จึงทำการพัฒนามือที่มีหัวนิ้ว โดยใช้มอเตอร์อัลตราโซนิค (ultrasonic motor) เพื่อให้มือหุ่นยนต์มีขนาดเล็กลง ใกล้เคียงกับขนาดของมือมนุษย์ มีน้ำหนักเบา และออกแรงให้กับนิ้วได้สูงกว่ามอเตอร์ชนิดอื่น เนื่องจากมือหุ่นยนต์ที่ได้รับการพัฒนาในปัจจุบันดังที่กล่าวมานั้นล้วนเป็นมือหุ่นยนต์ที่มีนิ้วจำนวนสี่และหัวนิ้ว งานวิจัยเกี่ยวกับการจับและการจัดวัตถุในมือหุ่นยนต์ส่วนใหญ่จึงศึกษาเฉพาะปัญหาที่ต้องการใช้นิ้วไม่เกินหัวนิ้ว

สิ่งที่ต้องคำนึงถึงเป็นประการต่อไปคือ ทำอย่างไรมือหุ่นยนต์นั้นจึงจะสามารถจับวัตถุอย่างมีประสิทธิภาพได้ คุณสมบัติหนึ่งที่ต้องการคือการจับให้อยู่ในสภาพสมดุล (equilibrium) เมื่อวัตถุถูกจับให้อยู่ในสภาพสมดุล ผลรวมของแรง (force) และแรงบิด (torque) ทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ ทำให้วัตถุอยู่นิ่ง อย่างไรก็ตามการจับให้อยู่ในสภาพสมดุลเพียงลำพังนั้นไม่เพียงพอ หากมีการแทรกแซงจากแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุก็อาจจะทำให้การจับนั้นเสียสภาพสมดุลได้ คุณสมบัติที่ต้องคำนึงถึงเพิ่มเติมคือคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ การจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์นั้น นิ้วจะสามารถออกแรงเพื่อหักล้างแรงและแรงบิดที่มารบกวนการจับได้ ทำให้ผลรวมของแรงและแรงบิดทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุยังคงเป็นศูนย์อยู่เสมอ (เมื่อกำหนดให้

นิ้วสามารถออกแรงที่มีขนาดใด ๆ ก็ได้ตามต้องการ) งานวิจัยเกี่ยวกับคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ที่
 ได้รับการอ้างถึงมากคือ [5] เป็นงานวิจัยเรื่องการจับวัตถุหลายเหลี่ยมด้วยนิ้วจำนวนสองนิ้วที่อยู่ใน
 ในสภาพสมดุล และมีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ โดยกำหนดให้นิ้วสัมผัสกับวัตถุเป็นจุดสัมผัสซึ่ง
 มีความเสียดทาน งานวิจัยนี้ได้เสนอเงื่อนไขสำหรับการจับด้วยสองนิ้วที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลส
 เซอร์ วิธีการหาบริเวณสัมผัสอิสระ (independent contact region) ซึ่งเป็นบริเวณที่นิ้วทั้งสอง
 สามารถทำการจับวัตถุให้มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์โดยที่ตำแหน่งของนิ้วมีอิสระต่อกันหาก
 วางตัวอยู่ในบริเวณดังกล่าว และทำการพิสูจน์ความมีเสถียรภาพของการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ช
 โคลสเซอร์ด้วยหลักการยึดหดตัวของสปริง คุณสมบัติที่ใกล้เคียงกับคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์คือ
 คุณสมบัติฟอร์มโคลสเซอร์ (form closure) ซึ่งความแตกต่างระหว่างคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์
 และฟอร์มโคลสเซอร์คือ คุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์คำนึงถึงข้อกำหนดของแรง ในขณะที่
 คุณสมบัติฟอร์มโคลสเซอร์คำนึงถึงข้อกำหนดทางจลนศาสตร์เกี่ยวข้องกับการปิดกั้นการ
 เคลื่อนไหว (immobilization) ของวัตถุ ภายหลัง [6] ได้ทำการพิสูจน์ว่าการจับจะมีคุณสมบัติ
 ฟอร์ชโคลสเซอร์ก็ต่อเมื่อการจับนั้นมีคุณสมบัติฟอร์มโคลสเซอร์ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติ
 ฟอร์มโคลสเซอร์คือ [7] ส่วนสำคัญของงานวิจัยนี้คือการพิสูจน์ว่าสี่นิ้วและสิบสองนิ้วเพียงพอ
 สำหรับการจับวัตถุใดๆ ในสองมิติและสามมิติตามลำดับ หากเป็นวัตถุทรงหลายหน้า
 (polyhedron) ใช้แค่เจ็ดนิ้วก็เพียงพอ นอกจากนี้ยังทำการพิสูจน์กรณีพื้นผิวสัมผัสมีความเสียด
 ทานโดยสรุปว่าสามนิ้วเพียงพอสำหรับการจับวัตถุในสองมิติ และสี่นิ้วเพียงพอสำหรับการจับวัตถุ
 ทรงหลายหน้าในสามมิติ งานวิจัยที่ต่อเนื่องมาจาก [5] เป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการจับวัตถุหลาย
 เหลี่ยมด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้ว [8] กล่าวถึงลักษณะของการจับด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้วเพื่อให้มี
 คุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ และใช้การคำนวณเชิงเส้น (linear programming) เพื่อหาบริเวณ
 สัมผัสอิสระที่กว้างที่สุด โดยงานวิจัยจากผู้เขียนเดียวกันนี้ [9] สนใจปัญหาการจับวัตถุทรงหลาย
 หน้าด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้วและสี่นิ้ว งานวิจัยนี้แสดงถึงลักษณะการวางตัวของแนวแรงและ
 ตำแหน่งของนิ้วเพื่อให้การจับนั้นมีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ โดยทำการกำจัดตัวแปรที่ไม่
 เกี่ยวข้องกับตำแหน่งของนิ้วด้วยการฉายโพลีโทป (polytope) ลงบนปริภูมิย่อย และทำการเลือก
 การจับที่ดีที่สุดด้วยการใช้ขนาดของบริเวณสัมผัสอิสระเป็นเกณฑ์ ซึ่งงานวิจัยนี้ต่อมาได้มีการวิจัย
 เพิ่มเติมคืองานวิจัย [10] เสนอวิธีการฉายโพลีโทปสองวิธีคือ วิธีการกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian
 elimination) และวิธีที่ใช้อัลกอริทึมคอนทัวร์แทรกกิง (contour-tracking) เพื่อลดความซับซ้อนใน
 การใช้วิธีฉายโพลีโทป งานวิจัย [11] ได้เสนอวิธีหลีกเลี่ยงการฉายโพลีโทปด้วยการเปลี่ยนวิธีการ
 แทนการจับจากตำแหน่งของนิ้วบนวัตถุเป็นการแทนการจับด้วยจุดโฟกัส (focus point) ตัวแปรทุก

ตัวของจุดโฟกัสมีความเกี่ยวข้องกับตำแหน่งจับโดยตรงจึงไม่ต้องทำการฉายโพลีโทปเพื่อกำจัดตัวแปร

งานวิจัยที่มีความเกี่ยวข้องและใกล้เคียงกับวิทยานิพนธ์นี้ที่สุดคืองานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดวัตถุในมือ และการเปลี่ยนการจับ งานวิจัยแรก ๆ เกี่ยวกับการเปลี่ยนการจับเสนอไว้ใน [12] โดยใช้วิธีการแทนที่ของนิ้วเมื่อนิ้วถึงจุดสิ้นสุดของบริเวณทำงานของมัน งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วที่ใช้ในการจับด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้วและสี่นิ้วบนวัตถุผิวโค้งทั้งวัตถุในสองมิติและสามมิติ โดยพิจารณานิ้วเป็นเพียงแค่จุดและเป็นนิ้วแข็งที่มีความเสียดทานที่จุดสัมผัสระหว่างนิ้วกับวัตถุ การจับที่พิจารณาคือการจับแบบสองนิ้วและสามนิ้ว จุดที่น่าสนใจของงานวิจัยนี้คือการใช้มือหุ่นยนต์สี่นิ้วทำการเปลี่ยนการจับโดยพิจารณาการจับด้วยสองนิ้วสองแบบที่ไม่มีความเกี่ยวข้องกัน ทำให้การเปลี่ยนการจับง่ายกว่าการใช้มือหุ่นยนต์ที่มีสามนิ้ว เนื่องจากนิ้วทั้งสามต้องมีความเกี่ยวเนื่องกันอยู่ตลอด

การจัดวัตถุในมือเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจในวงการวิทยาการหุ่นยนต์มาโดยตลอด งานวิจัย [13] ได้เสนอกรอบ (framework) ของการวางแผนการจัดวัตถุในมือด้วยการหมุนนิ้ว และการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้ว โดยทำการแบ่งประเภทของการจัดวัตถุด้วยมือที่มีหลายนิ้วเป็นสามประเภทคือ (1) การจัดวัตถุ โดยมีจุดประสงค์เพื่อให้วัตถุอยู่ในคอนฟิกูเรชันที่ต้องการโดยไม่สนใจคอนฟิกูเรชันของจุดสัมผัส (2) การเปลี่ยนแปลงการจับ ซึ่งคำนึงถึงคอนฟิกูเรชันของจุดสัมผัสโดยไม่สนใจคอนฟิกูเรชันของวัตถุ และ (3) การจัดที่คำนึงถึงคอนฟิกูเรชันของวัตถุและจุดสัมผัส โดยในงานวิจัยนี้คำนึงถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องคือ จลนศาสตร์ที่จุดสัมผัส (contact kinematics) การจัดพิกัดของวัตถุ การจับที่มีเสถียรภาพ รวมถึงการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้ว งานวิจัยนี้กำหนดให้มือหุ่นยนต์ที่นำมาใช้นี้มีนิ้วจำนวนสามนิ้ว ดังนั้นจึงพิจารณาการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ด้วยนิ้วจำนวนสองนิ้ว และสามนิ้ว โดยกำหนดให้นิ้วเป็นครึ่งทรงกลม นอกจากนี้ยังคำนึงถึงพื้นที่ทำงานของนิ้วด้วย และได้ทำการเสนอตัวอย่างมือที่มีสามนิ้วทำการจัดวัตถุทรงกลม ถึงแม้จะทำการจัดวัตถุทรงกลมซึ่งเป็นรูปทรงพื้นฐาน แต่มีจุดเด่นคือสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการหมุนของนิ้ว และการหมุนของวัตถุทรงกลมได้อย่างชัดเจน

งานวิจัยที่ใกล้เคียงกับวิทยานิพนธ์นี้มากที่สุดคืองานวิจัยการวางแผนการเปลี่ยนการจับสำหรับวัตถุหลายเหลี่ยมใน [14] ข้อกำหนดของงานวิจัยนี้คือ ใช้มือหุ่นยนต์ที่มีนิ้วจำนวนสี่นิ้วโดยที่มีความเสียดทานระหว่างผิววัตถุและปลายนิ้ว และสามารถทำการยกนิ้วที่ไม่เกี่ยวข้องกับการจับได้เพียงครั้งละนิ้วเดียวเท่านั้น วิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้แบ่งปัญหาเพื่อคำนวณหาตำแหน่ง

การจับเป็นสามปัญหาคือ ปัญหา $A(c)$ เป็นปัญหาที่ว่า นิ้ว c สามารถถูกนำออกจากการจับเริ่มต้นได้หรือไม่ สามารถแก้ปัญหาคำนวณเชิงเส้น ปัญหา $B(c,n)$ เป็นปัญหาการคำนวณหาพื้นที่สัมผัสผิวของนิ้ว c ที่สามารถทำการจับที่มีเสถียรภาพได้โดยไม่มีนิ้ว n มาเกี่ยวข้อง ปัญหานี้เป็นปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น ปัญหา $C(c,n,d)$ เป็นปัญหาการคำนวณพื้นที่สัมผัสผิวของนิ้ว c โดยที่การจับนั้นมีนิ้ว c และ n เกี่ยวข้องกับการจับแล้วสามารถคงสภาพการจับที่มีเสถียรภาพได้โดยไม่มีนิ้ว d มาเกี่ยวข้อง เป็นปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้นและมีความซับซ้อนมากกว่าปัญหา B การหาลำดับของการจับในงานวิจัยนี้ใช้โครงสร้างต้นไม้ โดยที่แต่ละจุดในต้นไม้แทนนิ้วที่ถูกยกออก โดยเริ่มจากการแก้ปัญห $A(c)$ เพื่อหานิ้วที่สามารถยกออกได้จากการจับเริ่มต้น หลังจากนั้นทำการแก้ปัญห $B(c,n)$ เพื่อหานิ้ว n ที่สามารถยกออกได้โดยที่นิ้ว c กลับมาเกี่ยวข้องกับการจับวัตถุ บางครั้งการแก้ปัญห $B(c,n)$ อาจไม่ได้คำตอบ แต่คำตอบนั้นอาจมีได้หากทำการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้ว p ก่อนที่จะทำการปรับเปลี่ยนนิ้ว c ซึ่งก็คือการแก้ปัญห $C(p,c,n)$ นั่นเอง การแก้ปัญห C นั้นใช้เวลานานมาก ดังนั้นในการขยายลูกของจุดยอดในต้นไม้จึงใช้ฟังก์ชันแบบศึกษาสำนึก (heuristic function) ในการพิจารณา โดยตั้งจุดประสงค์ของการค้นหาเพื่อให้นิ้วทุกนิ้วอยู่ในตำแหน่งที่สามารถทำการหมุนวัตถุได้มากกว่ามุมที่กำหนด ตัวแปรที่นำมาพิจารณาในฟังก์ชันแบบศึกษาสำนึกคือ มุมที่เปลี่ยนไปของวัตถุที่นิ้วสามารถกระทำได้ ระดับความลึกของจุดยอดในต้นไม้ และการลงโทษหากต้องทำการแก้ปัญห C ซึ่งต้องใช้วิธีการแก้ปัญหที่ไม่ใช่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนและใช้เวลานาน

นอกจากงานวิจัยเกี่ยวกับการจับ และการจัดวัตถุในมือหุ่นยนต์ข้างต้น ได้มีผู้เขียนบทความรวบรวมงานวิจัยเรื่องการจับ [15] และบทความรวบรวมงานวิจัยเรื่องการจัดวัตถุในมือหุ่นยนต์ [16] ซึ่งช่วยให้มองเห็นภาพรวมของงานวิจัยในด้านนี้ได้เป็นอย่างดี

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องกล่าวถึงในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งเป็นสามส่วนคือ 2.2.1 เป็นเรื่องการจับและความเสียดทาน เนื้อหาในส่วนนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเสียดทานและแรงกระทำจากนิ้ว หัวข้อ 2.2.2 กล่าวถึงสภาพสมดุลของการจับ การจับที่มีคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์ และความสัมพันธ์ระหว่างสภาพสมดุลของการจับและคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์ โดยส่วนสำคัญคือข้อสรุปที่ว่า สภาพสมดุลของการจับเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์ ข้อสรุปนี้ทำให้เราสามารถหาการจับที่มีคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์ได้จากการ

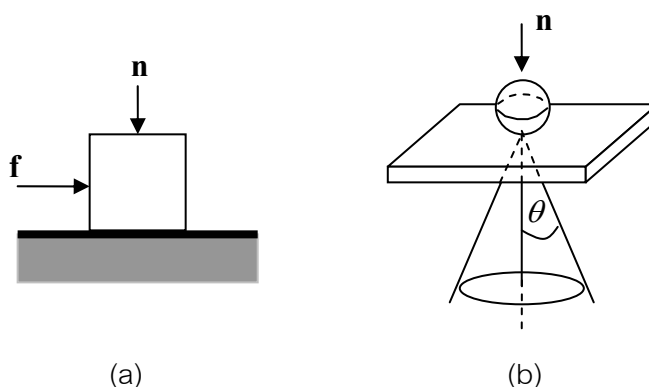
คำนวณหาการจับที่ทำให้เกิดสภาพสมดุลของการจับ และหัวข้อที่ 2.2.3 จะกล่าวถึงเงื่อนไขในการจับวัตถุหลายเหลี่ยมในสภาพสมดุลด้วยสองและสามนิ้วตามลำดับ

2.2.1 การจับและความเสียดทาน

การใช้นิ้วจับนับเป็นหัวใจสำคัญของการจับวัตถุด้วยมือหุ่นยนต์ นิ้วหุ่นยนต์แบ่งเป็นสองประเภทคือ นิ้วแข็ง (hard finger) และนิ้วอ่อน (soft finger) นิ้วอ่อนแตกต่างจากนิ้วแข็งด้วยความสามารถในการถ่ายทอดแรงบิดรอบจุดสัมผัส ในขณะที่นิ้วแข็งสามารถออกแรงกระทำที่จุดสัมผัสได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น การวิเคราะห์การจับด้วยนิ้วแข็งแบ่งตามลักษณะของผิวสัมผัสเป็นสองประเภทคือ แบบไม่มีแรงเสียดทานและแบบมีแรงเสียดทาน เมื่อไม่มีแรงเสียดทาน นิ้วออกแรงกระทำกับวัตถุได้ในเฉพาะทิศทางตั้งฉากกับผิวสัมผัส แต่เมื่อมีแรงเสียดทานเข้ามาเกี่ยวข้อง แรงกระทำจะถูกกำหนดด้วยธรรมชาติของแรงเสียดทาน แรงเสียดทานเป็นปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่ซับซ้อนและเกี่ยวข้องกับโครงสร้างทางวัสดุของผิวสัมผัสทั้งในระดับจุลภาค (microscale) และระดับมหภาค (macroscale) ถึงแม้ว่าพฤติกรรมโดยละเอียดของแรงเสียดทานเป็นปัญหาที่ยังต้องรอการค้นคว้าจากนักวิทยาศาสตร์ การใช้กฎของคูลอมบ์ [17] ในการอธิบายแรงเสียดทานก็เป็นที่ยอมรับว่าแม่นยำพอเพียงในทางกลศาสตร์และงานทฤษฎีเกี่ยวกับการจับ ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทนำว่าการจับที่มีเสถียรภาพนั้น นิ้วจะต้องอยู่หนึ่งเมื่อเทียบกับวัตถุ นั่นก็คือผิวสัมผัสระหว่างนิ้วกับวัตถุไม่เคลื่อนที่ จากกลศาสตร์เบื้องต้น [18] แรงเสียดทานที่เกี่ยวข้องในกรณีนี้คือแรงเสียดทานสถิต (static friction) แรงเสียดทานสถิตเป็นแรงต้านทานความพยายามที่จะเคลื่อนที่ของวัตถุ วัตถุที่อยู่หนึ่งจะเริ่มเคลื่อนที่ได้เมื่อมีแรงกระทำในทิศทางเคลื่อนที่ซึ่งมีขนาดไม่น้อยกว่าขนาดของแรงเสียดทานสถิตสูงสุดตามกฎของคูลอมบ์ ขนาดของแรงเสียดทานสถิตสูงสุดนี้สามารถคำนวณได้จากผลคูณระหว่างขนาดของแรงกดในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัสและค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิต (static friction coefficient) ซึ่งเป็นค่าคงตัวขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของผิวสัมผัสทั้งสอง ดังตัวอย่างในรูปที่ 1(a) ซึ่งแสดงวัตถุรูปลูกบาศก์ที่อยู่หนึ่งบนพื้นเรียบและมีแรงกดคือ \mathbf{n} เมื่อสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตของผิวสัมผัสทั้งสองเป็น μ จะได้ว่าแรงผลึก \mathbf{f} ที่มีขนาดน้อยกว่า $|\mu \mathbf{n}|$ ไม่ว่าจะมาจากทิศทางใดก็ตามก็ไม่สามารถทำให้วัตถุนี้เคลื่อนที่ไปได้ ข้อสรุปจากตัวอย่างนี้สามารถนำมาใช้ในการพิจารณาแรงที่นิ้วกระทำต่อวัตถุในขณะที่วัตถุถูกจับให้อยู่หนึ่งได้ รูปที่ 1(b) แสดงนิ้วทรงกลมที่สัมผัสกับผิววัตถุ โดยเมื่อนิ้วออกแรงกด \mathbf{n} ในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัส นิ้วก็สามารถออกแรงที่มีขนาดน้อยกว่า $|\mu \mathbf{n}|$ ในทิศทางใดก็ได้ที่ขนานกับผิวสัมผัสโดยไม่ทำให้เกิดการเลื่อนของนิ้วบนผิวสัมผัส เมื่อพิจารณาแรงในแนวตั้งฉากและแนวขนานกับผิวสัมผัส เราจึงเห็นได้ว่าแรงรวมที่นิ้วกระทำต่อวัตถุจะต้องมี

แนวแรงอยู่ในกรวยซึ่งมีจุดสัมผัสเป็นจุดยอด มีแกนกลางในทิศทางที่ตั้งฉากกับผิวสัมผัส และมีครึ่งหนึ่งของมุมที่จุดยอด (half cone angle) เป็น $\theta = \tan^{-1}(\mu)$ เราเรียกรวยดังกล่าวนี้ว่ากรวยเสียดทาน (friction cone) และสามารถเขียนได้ว่า

ทฤษฎีบท 1 เมื่อไม่มีการเคลื่อนที่ระหว่างผิวสัมผัส แรงรวมที่นิ้วกระทำต่อวัตถุวางตัวอยู่ภายในกรวยเสียดทานที่จุดสัมผัส



รูปที่ 1 แรงเสียดทานตามกฎของคูลอมบ์

2.2.2 สภาพสมดุลของการจับและคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์

ในทางกลศาสตร์ วัตถุอยู่นิ่งยอมอยู่ในสภาพสมดุล วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลก็ต่อเมื่อแรงรวมและแรงบิดรวมที่กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลของการจับ (grasping equilibrium) เมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลภายใต้แรงและแรงบิดจากนิ้ว โดยไม่มีการรบกวนจากแรงและแรงบิดอื่นๆ ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่า นิ้วแข็งซึ่งเราศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้ออกแรงได้เพียงอย่างเดียว นั่นก็คือแรงบิดที่ต้องพิจารณาในการวิเคราะห์สภาพสมดุลของการจับ มีเพียงแรงบิดที่ได้จากการคำนวณโมเมนต์ (moment) ของแรงกระทำจากนิ้วรอบจุดกำเนิด การคำนวณโมเมนต์นี้คือการหาผลคูณไขว้ $\mathbf{x} \times \mathbf{f}$ โดยที่ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งจุดสัมผัส และ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ เป็นแรงกระทำจากนิ้ว ซึ่งในกรณีที่บริเวณทำงานมีสองมิติ แรง \mathbf{f} และตำแหน่ง \mathbf{x} ใดๆ จะอยู่บนระนาบเดียวกัน ($x_3 = 0$ และ $f_3 = 0$) ทำให้ได้โมเมนต์อยู่ในรูป $(0, 0, x_1 f_2 - f_1 x_2)^T$ ก่อนที่เราจะกล่าวถึงคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ ขอนิยามสภาพสมดุลของการจับอย่างชัดเจนสำหรับการอ้างอิงถึงภายหลังดังนี้

บทนิยาม 1 สภาพสมดุลของการจับด้วยนิ้วแข็งคือ สภาพสมดุลที่เกิดจากแรงกระทำจากนิ้วเท่านั้น (ไม่มีแรงและแรงบิดอื่นๆ เกี่ยวข้อง) โดยต้องมีอย่างน้อยหนึ่งนิ้วที่ออกแรง

เมื่อพิจารณาอย่างผิวเผิน จะเห็นได้ว่าการจับที่ทำให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลของการจับไม่เพียงพอ หากมีแรงหรือแรงบิดภายนอกครอบงวน การจับดังกล่าวก็ไม่แน่ว่าจะสามารถออกแรงเพื่อหักล้างการครอบงวนได้ในทุกกรณี ด้วยเหตุนี้จึงได้มีการนิยามคุณสมบัติที่พึงประสงค์ของการจับที่เรียกว่าฟอร์ชโคลสเซอร์ กล่าวคือ

บทนิยาม 2 เมื่อขนาดของแรงที่นิ้วกระทำต่อวัตถุไม่ถูกจำกัด การจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์จะสามารถออกแรงหักล้างแรงหรือแรงบิดภายนอกใดๆ ที่มารอบวงวนได้ ทำให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุล ไม่ว่าจะมีการครอบงวนใดๆ ก็ตาม

บทนิยาม 2 ชี้ชัดว่าการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ย่อมสามารถทำให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลของการจับได้ด้วย (แรงและแรงบิดครอบงวนเป็นศูนย์) แต่ที่น่าสนใจกว่าคือบทบาทกลับของข้อสรุปนี้ ดังที่ได้มีการพิสูจน์ไว้ใน [5] และ [8] ว่า

ทฤษฎีบท 2 เมื่อผิวสัมผัสมีความเสียดทาน การจับด้วยนิ้วแข็งซึ่งแรงกระทำจากแต่ละนิ้วอยู่ภายใน (interior) กรวยเสียดทานอย่างเคร่งครัด และสามารถทำให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลของการจับ ย่อมเป็นการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ด้วยเสมอ

ทฤษฎีบท 2 นี้ทำให้เราสามารถหาการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ได้ด้วยการคำนวณตำแหน่งจุดสัมผัส ของการจับที่ทำให้เกิดสภาพสมดุลของการจับได้ โดยในทางปฏิบัติการคำนวณนี้อาจใช้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตที่น้อยกว่าค่าจริง เพื่อให้แน่ใจว่าแรงกระทำจากนิ้วจะอยู่ในกรวยเสียดทานจริงตามที่กำหนดไว้ในทฤษฎี ข้อกำหนดของแรงดังกล่าวเป็นส่วนจำเป็นในการพิสูจน์ทฤษฎีบทใน [8] โดยในบทความนี้ได้มีการแยกประเภทให้กับสภาพสมดุลตามทฤษฎีบท 2 โดยเรียกว่าสภาพสมดุลที่ไม่ใช่ขอบ (non-marginal equilibrium) อย่างไรก็ตาม วิทยานิพนธ์นี้ไม่มีความจำเป็นต้องแยกประเภทของสภาพสมดุล เนื่องจากแรงกระทำจากนิ้วได้รับการรับประกันจากทฤษฎีบท 1 แล้วว่าต้องอยู่ภายในกรวยเสียดทาน

2.2.3 เงื่อนไขในการจับวัตถุหลายเหลี่ยมในสภาพสมดุล

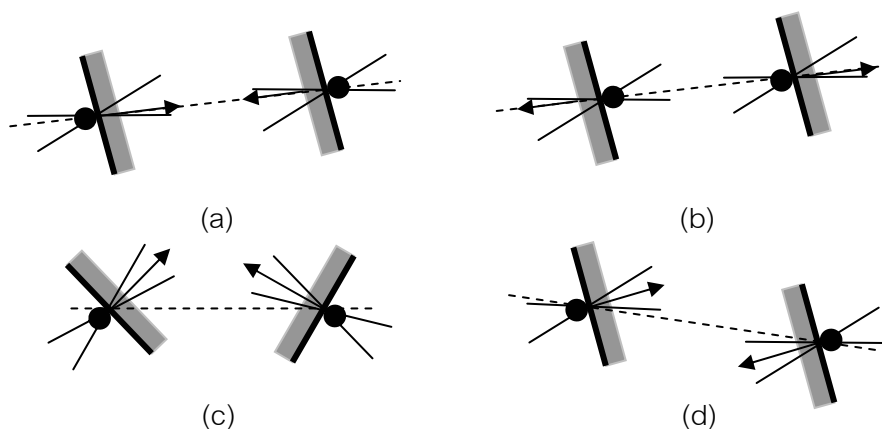
หัวข้อนี้จะขอกล่าวถึงลักษณะของการจับด้วยสองและสามนิ้วเพื่อให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลของการจับ โดยใช้เงื่อนไขของแนวแรงและตำแหน่งจุดสัมผัส ตลอดหัวข้อนี้ เรากำหนดให้ θ แทนครึ่งหนึ่งของมุมที่จุดยอดกรวยเสียดทาน นอกจากนี้จะขอใช้คำว่ากรวยเสียดทานภายใน (internal friction cone) เพื่อเรียกรวยเสียดทานที่มีทิศพุ่งเข้าหาเนื้อวัตถุ (ตามทิศทางแรงกระทำจากนิ้ว) และเมื่อพิจารณาเส้นตรงทุกเส้นที่ขนานกับเวกเตอร์ในกรวยเสียดทาน

ภายใน เราจะได้กรวยสองชั้นที่วางตัวตรงข้ามกันที่จุดสัมผัส (รูปที่ 2) ขอเรียกรวยทั้งสองชั้นรวมกันว่ากรวยเสียดทานสองด้าน (double-sided friction cone)

ทฤษฎีบท 3 ต่อไปนี้ นำมาจาก [5] ซึ่งกล่าวถึงลักษณะของการจับด้วยนิ้วจำนวน 2 นิ้ว เพื่อให้อยู่ในสภาพสมดุลของการจับ

ทฤษฎีบท 3 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับจุดจับสองจุดเพื่อให้เกิดการจับที่อยู่ในสภาพสมดุลคือ เวกเตอร์ทั้งสองที่ตั้งฉากกับด้านที่สัมผัสและมีทิศทางพุ่งเข้าหาแนววัตถุทำมุมกันอยู่ในช่วง $(\pi - 2\theta, \pi + 2\theta)$ และเส้นเชื่อมระหว่างจุดจับสองจุดนั้นวางตัวอย่างเคร่งครัดอยู่ในกรวยเสียดทานสองด้านทั้งสองกรวย

ตัวอย่างของการจับด้วยนิ้วสองนิ้วซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 3 แสดงดังรูปที่ 2(a) และรูปที่ 2(b) แต่การจับดังรูปที่ 2(c) ไม่เป็นการจับที่อยู่ในสภาพสมดุลเพราะเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับด้านที่สัมผัสกับนิ้วทั้งสองทำมุมกันอยู่นอกช่วง $(\pi - 2\theta, \pi + 2\theta)$ และเส้นเชื่อมระหว่างจุดจับทั้งสองจุดไม่วางตัวอยู่ในกรวยเสียดทานสองด้าน และการจับดังรูปที่ 2(d) ไม่เป็นการจับที่อยู่ในสภาพสมดุลเนื่องจากเส้นเชื่อมระหว่างจุดจับทั้งสองจุดไม่วางตัวอยู่ในกรวยเสียดทานสองด้าน ถึงแม้เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับด้านที่สัมผัสกับนิ้วทั้งสองทำมุมกันอยู่ในช่วง $(\pi - 2\theta, \pi + 2\theta)$ ก็ตาม



รูปที่ 2 การจับด้วยนิ้วจำนวนสองนิ้ว : ลูกศรแสดงถึงแรงที่นิ้วกระทำกับวัตถุซึ่งวางตัวอยู่ในกรวยเสียดทานสองด้าน เส้นประคือเส้นเชื่อมระหว่างจุดจับทั้งสองจุด

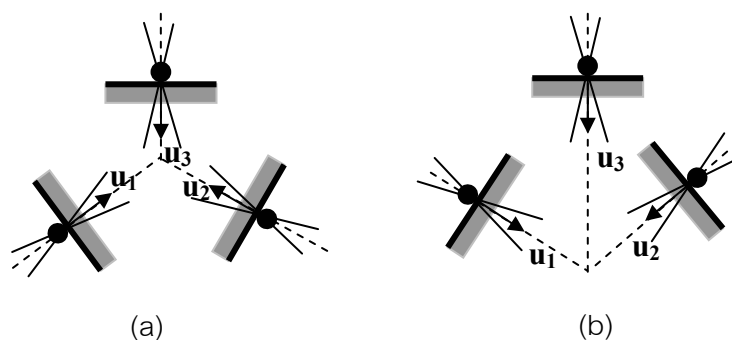
จากนี้จะขอกล่าวถึงการจับด้วยนิ้วจำนวน 3 นิ้ว เพื่อให้อยู่ในสภาพสมดุลของการจับโดยอาศัยบทนิยามเพิ่มเติม ดังนี้

บทนิยาม 3 เซตของเวกเตอร์สแปนทางบวก (positively span) ใน \mathcal{R}^n ถ้าเวกเตอร์ใด ๆ ใน \mathcal{R}^n สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ในเซตนี้ด้วยสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นมาจาก [8]

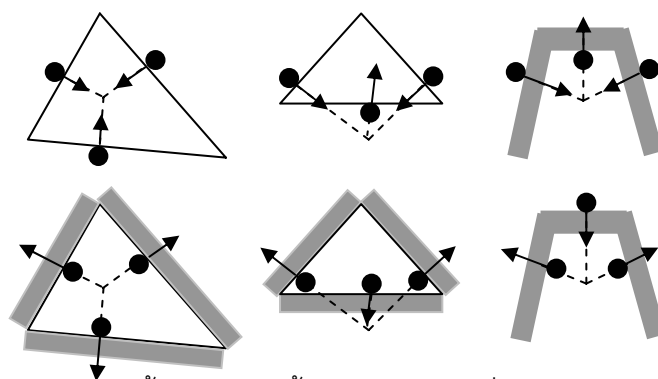
ทฤษฎีบท 4 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการจับด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้ว เพื่อให้อยู่ในสภาพสมดุลโดยที่แรงที่จุดสัมผัสทั้งสามไม่เป็นศูนย์ และไม่ขนานกันคือ (Pa) เมื่อมีเส้นในแต่ละกรวยเสียดทานสองด้านที่จุดสัมผัสทั้งสามตัดกัน ณ จุด ๆ หนึ่ง และ (Pb) เวกเตอร์แรงที่วางตัวอยู่ในกรวยเสียดทานภายในที่จุดสัมผัส และขนานกับเส้นทั้งสามนั้นสแปนทางบวกใน \mathcal{R}^2

ตัวอย่างของการใช้งานทฤษฎีบท 4 แสดงในรูปที่ 3 โดยรูปที่ 3(a) มีแรง $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ซึ่งตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง และสแปนทางบวกใน \mathcal{R}^2 ดังนั้นการจับที่แสดงในรูปที่ 3(a) จึงเป็นการจับที่อยู่ในสภาพสมดุล ในขณะที่การจับที่แสดงในรูปที่ 3(b) ซึ่งแรง $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ตัดกันที่จุด ๆ หนึ่งแต่ไม่สแปนทางบวกใน \mathcal{R}^2 ดังนั้นจึงไม่เป็นการจับที่อยู่ในสภาพสมดุล ตัวอย่างการจับด้วย 3 นิ้วซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 4 ในแบบต่าง ๆ แสดงดังรูปที่ 4



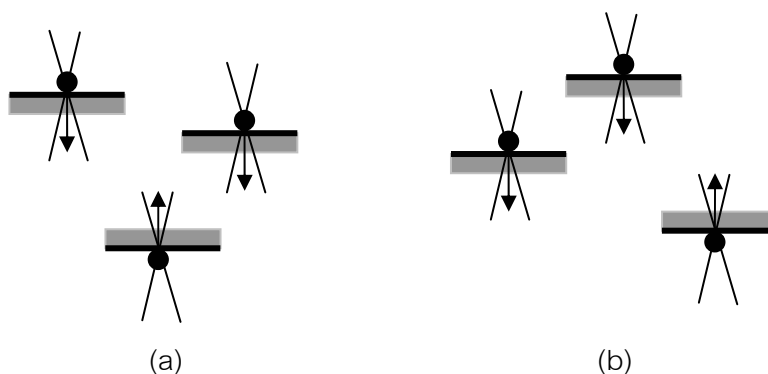
รูปที่ 3 การจับด้วยนิ้วจำนวน 3 นิ้ว

ทฤษฎีบท 5 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการจับด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้ว เพื่อให้อยู่ในสภาพสมดุลด้วยแรงที่ขนานกันโดยที่แรงที่จุดสัมผัสทั้งสามไม่เป็นศูนย์คือ มีเส้นในกรวยเสียดทานสองด้านที่จุดสัมผัสทั้งสามขนานกัน และเวกเตอร์แรงที่ขนานกับสามเส้นนั้น (ซึ่งวางตัวอยู่ในกรวยเสียดทานภายในที่จุดสัมผัส) มีเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นที่อยู่กลางที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับสองเวกเตอร์ที่เหลือ



รูปที่ 4 การจับด้วยนิ้วจำนวน 3 นิ้วในแบบต่าง ๆ ที่เป็นไปตามทฤษฎีบท 4

ตัวอย่างการจับด้วยนิ้วสามนิ้วแบบขนานซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 5 แสดงในรูปที่ 5(a) ในขณะที่การจับที่แสดงดังรูปที่ 5(b) ไม่เป็นไปตามทฤษฎีบท 5 เนื่องจากเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกันสองเวกเตอร์ที่เหลือไม่ได้อยู่ตรงกลาง



รูปที่ 5 การจับด้วยนิ้วสามนิ้วแบบขนาน

เนื่องจากการสร้างกราฟการสลับนิ้วจำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขในทฤษฎีบท 6 ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เคร่งครัดกว่าเงื่อนไขในทฤษฎีบท 4 บทนิยามเพิ่มเติมเพื่อนำไปใช้ในทฤษฎีบท 6 เป็นดังนี้

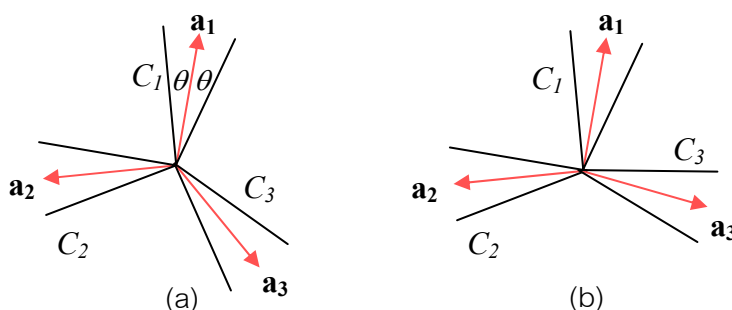
บทนิยาม 4 กำหนดให้ $C_i (i = 1, 2, 3)$ คือกรวยซึ่งมีกึ่งกลางคือ \mathbf{a}_i ด้วยครึ่งมุม θ สามารถกล่าวได้ว่าเวกเตอร์สามเวกเตอร์ $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, 3)$ สเปนทางบวกด้วยมุม θ (θ -positively span) ใน \mathbb{R}^2 เมื่อสามเวกเตอร์ใด ๆ $\mathbf{b}_i \in C_i (i = 1, 2, 3)$ ใด ๆ สเปนทางบวกใน \mathbb{R}^2

เพื่อทำการอธิบายการสเปนทางบวกด้วยมุม θ ใน \mathbb{R}^2 ของสามเวกเตอร์ให้พิจารณารูปที่ 6 โดยที่เวกเตอร์ $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, 3)$ ที่แสดงในรูปที่ 6(a) สเปนทางบวกด้วยมุม θ

ในขณะที่เวกเตอร์ \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) ที่แสดงในรูปที่ 6(b) ไม่สลับเส้นทางบวกด้วยมุม θ เนื่องจากมีสามเวกเตอร์ $\mathbf{b}_i \in C_i$ ($i = 1, 2, 3$) บางเวกเตอร์ที่ไม่สลับเส้นทางบวกใน \mathbb{R}^2 ซึ่งเห็นได้ชัดว่าเวกเตอร์สามเวกเตอร์จะสลับเส้นทางบวกด้วยมุม θ ใน \mathbb{R}^2 ก็ต่อเมื่อมุมระหว่างทุกเวกเตอร์มีค่าน้อยกว่า $\pi - 2\theta$

ทฤษฎีบท 6 เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการจับด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้วเพื่อให้อยู่ในสภาพสมดุลโดยที่แรงที่จุดสัมผัสทั้งสามไม่เป็นศูนย์ และไม่ขนานกันคือ (Pa) มีเส้นในกรวยเสียดทานสองด้านที่จุดสัมผัสทั้งสามตัดกัน ณ จุด ๆ หนึ่ง และ (Pc) เวกเตอร์ตั้งฉากภายใน¹ (internal normal) ที่จุดสัมผัสทั้งสามเวกเตอร์สลับเส้นทางบวกด้วยมุม θ ใน \mathbb{R}^2

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้แสดงใน [8] ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าการแทนเงื่อนไข Pb ในทฤษฎีบท 4 ด้วยเงื่อนไข Pc ที่เคร่งครัดกว่า ทำให้มีการจับบางคอนฟิกรูชันเป็นไปตามทฤษฎีบท 4 แต่ไม่เป็นไปตามทฤษฎีบท 6 ถึงการจับตามทฤษฎีบท 6 จะทำให้การจับบางส่วนขาดหายไป แต่การจับส่วนที่ขาดหายไปนั้นส่วนหนึ่งคือการจับด้วยนิ้วจำนวนสองนิ้วดังแสดงใน [8] เหตุผลที่ใช้เงื่อนไขที่เคร่งครัดกว่าก็เพื่อการสร้างกราฟการสลับนิ้วอันจะกล่าวในหัวข้อที่ 3.2



รูปที่ 6 การสลับเส้นทางบวกด้วยมุม θ ของเวกเตอร์สามเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^2

¹ เวกเตอร์ตั้งฉากที่พุ่งเข้าหาเนื้อวัตถุ

บทที่ 3

กราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์

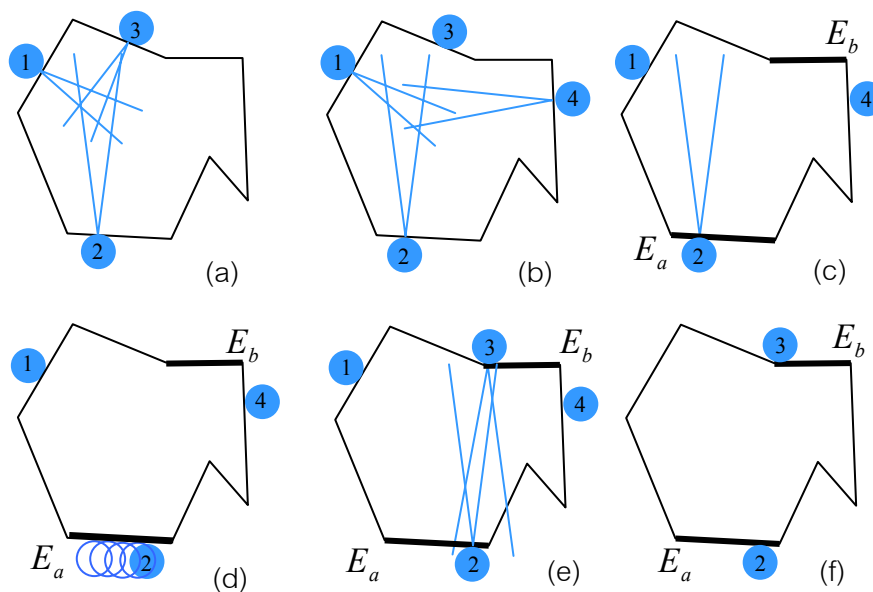
เป้าหมายหลักของวิทยานิพนธ์นี้คือการหาวิธีคำนวณหาลำดับของการวางตำแหน่งของนิ้วหุ่นยนต์นิ้ววัตถุหลายเหลี่ยมในสองมิติเพื่อเปลี่ยนคอนฟิกูเรชันของการจับ โดยในระหว่างกระบวนการเปลี่ยนแปลงคอนฟิกูเรชันนี้ การจับยังคงคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ตลอดทั้งกระบวนการ เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจนเกี่ยวกับการเปลี่ยนการจับและลำดับการเปลี่ยนนิ้ว หัวข้อที่ 3.1 จะนำเสนอตัวอย่างลำดับการเปลี่ยนการจับที่ต้องการ ก่อนที่จะนำเสนอวิธีการสร้างกราฟการสลับนิ้วซึ่งเป็นโครงสร้างที่ใช้คำนวณหาลำดับการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้ว โดยในบทนี้สนใจกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ ซึ่งเป็นประเด็นหลักในวิทยานิพนธ์นี้ การนำเสนอเริ่มที่หัวข้อที่ 3.2 จะขอกกล่าวถึงการระบุคอนฟิกูเรชันของการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ด้วยจุดบนระนาบ หัวข้อที่ 3.3 จะทำการอธิบายกระบวนการสลับนิ้วเพื่อเปลี่ยนเป็นการจับบนด้านที่ต่างกัน แต่การสลับนิ้วไม่สามารถทำได้หากตำแหน่งการจับในขณะนั้นไม่เหมาะสม จำเป็นต้องอาศัยการจัดวางนิ้วซึ่งจะกล่าวในหัวข้อที่ 3.4 ส่วนสุดท้ายของบทจะกล่าวถึงการคำนวณหากราฟการสลับนิ้วในหัวข้อที่ 3.5

3.1 ตัวอย่างลำดับของการเปลี่ยนนิ้ว

พิจารณาตัวอย่างมือหุ่นยนต์ที่มีนิ้วรูปวงกลม 4 นิ้ว ซึ่งทำการจับวัตถุหลายเหลี่ยม เริ่มด้วยการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ด้วยนิ้ว 1, 2 และ 3 ดังรูปที่ 7(a) เมื่อนิ้วที่ 4 วางตัวอยู่ในตำแหน่งดังรูปที่ 7(b) จะส่งผลให้การจับด้วยนิ้ว 1, 2 และ 4 มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ และทำให้สามารถยกนิ้ว 3 ออกได้โดยที่การจับยังคงมีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์อยู่ดังรูปที่ 7(c) จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนการจับข้างต้นเกิดจากการสลับนิ้วที่ใช้ในการจับ จึงเรียกการกระทำนี้ว่า *การสลับนิ้ว (finger switching)* ในขณะนี้จะเห็นว่านิ้ว 3 ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการจับวัตถุ จึงสามารถนำไปใช้ในการสลับนิ้วในการเปลี่ยนการจับครั้งต่อไปได้ อย่างไรก็ตามการสลับนิ้วอาจไม่สามารถทำได้โดยทันทีหลังจากการสลับนิ้วครั้งก่อนหน้า จึงต้องทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของนิ้วบางนิ้วก่อน เช่น ในการจับดังรูปที่ 7(c) ถ้าต้องการทำการจับด้วยสองนิ้วที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์บนด้าน E_a และ E_b จะเห็นว่าไม่ว่าจะวางนิ้ว 3 ไว้บนจุดใดบนด้าน E_b ก็ไม่สามารถทำการจับด้วยสองนิ้วที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ได้ ดังนั้นเพื่อให้สามารถทำการจับได้ต้องเลื่อนนิ้ว 2 ไปทางขวาดังรูปที่ 7(d) โดยในขณะที่นิ้ว 2 ทำการเคลื่อนที่ จะต้องอยู่บนผิววัตถุ

เสมอและยังทำการจับด้วยสามนิ้วที่มีคุณสมบัติฟอรัชโคลสเซอร์ร่วมกับนิ้ว 1 และ 4 ตลอด (โดยการเลื่อนนิ้ว [19] หรือหมุนนิ้ว [20]) จนกระทั่งนิ้ว 2 อยู่ในตำแหน่งที่เหมาะสม จึงจะนำนิ้ว 3 มาวางบนด้าน E_b แล้วทำให้เกิดการจับสองนิ้วที่มีคุณสมบัติฟอรัชโคลสเซอร์ได้ดังรูปที่ 7(e) จากนั้นจะสามารถปล่อยนิ้ว 1 และ 4 เพื่อนำไปใช้ในการเปลี่ยนแปลงการจับในครั้งต่อไปได้ การเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วเพื่อให้สามารถทำการสลับนิ้วได้เรียกว่า *การจัดวางนิ้ว (finger aligning)*

จะเห็นว่าเราสามารถพิจารณาการเปลี่ยนการจับในรูปของลำดับของการสลับนิ้วและการจัดวางนิ้วที่เหมาะสมได้ วิธีที่จะนำเสนอคำนวณลำดับดังกล่าวด้วยการค้นในกราฟการสลับนิ้ว ซึ่งแต่ละจุดยอดในกราฟนี้จะแทนเซตของการจับที่มีคุณสมบัติฟอรัชโคลสเซอร์ โดยคู่ของการจับที่อยู่ในจุดยอดเดียวกันนั้นสามารถทำการเปลี่ยนแปลงการจับด้วยการจัดวางนิ้วได้เสมอ และจุดยอดสองจุดยอดในกราฟจะมีเส้นเชื่อมระหว่างกันได้ก็ต่อเมื่อสามารถทำการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบหนึ่งซึ่งเป็นสมาชิกของจุดหนึ่งในกราฟให้เป็นการจับอีกแบบหนึ่งซึ่งเป็นสมาชิกของอีกจุดหนึ่งในกราฟได้



รูปที่ 7 ตัวอย่างลำดับของการจับ

กราฟการสลับนิ้วเป็นโครงสร้างที่สื่อถึงความสามารถในการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วโดยที่แต่ละจุดยอดในกราฟแทนเซตของการจับบนสองด้านหรือสามด้านที่ต่างกัน อีกทั้งยังแสดงถึงการจัดวางนิ้วระหว่างการจับในเซตเดียวกันด้วย เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดแสดงถึงการสลับนิ้วระหว่างการจับที่อยู่ในเซตการจับของสองจุดยอดที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นสิ่งที่เราต้องการในการ

สร้างกราฟการสลับนีวคือจุดยอดและเส้นเชื่อมทั้งหมดในกราฟ จุดยอดนั้นหาได้จากการคำนวณหาเซตของการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์บนแต่ละสองด้านและสามด้าน ในขณะที่เส้นเชื่อมระหว่างสองจุดยอดสามารถหาได้จากการซ้อนทับกันของเซตการจับที่ถูกแทนด้วยจุดยอดทั้งสอง

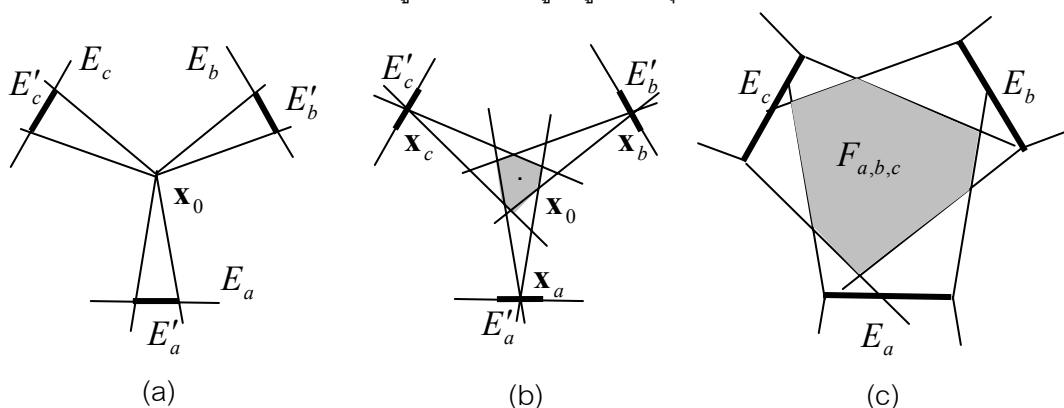
การสร้างกราฟการสลับนีวสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนที่อยู่บนพื้นฐานทางทฤษฎีการจับซึ่งทำให้เราสามารถแทนเซตของการจับแบบคอนเคอร์เรนที่ได้ด้วยพื้นที่บนระนาบ พื้นที่นี้แสดงถึงความสามารถในการจัดวางนีวระหว่างการจับแบบคอนเคอร์เรนที่ใด ๆ บนพื้นที่เดียวกัน เพราะการสลับนีวที่เป็นไปได้จากพื้นที่ซึ่งทับซ้อนกัน โดยในหัวข้อต่อไปจะแสดงถึงการแทนเซตของการจับแบบคอนเคอร์เรนที่ด้วยพื้นที่ดังกล่าว

3.2 การแทนการจับแบบคอนเคอร์เรนที่

โดยทั่วไปคอนฟิกูเรชันของการจับด้วยสามนีวบนด้านทั้งสามที่กำหนดไว้แล้วนั้นสามารถเขียนในรูปของระยะห่างระหว่างนีวกับจุดเริ่มต้นของด้านที่เกี่ยวข้อง นั่นคือเราต้องการใช้สามตัวแปรในการเขียนระบุนคอนฟิกูเรชันของการจับ แต่การจับแบบคอนเคอร์เรนที่ตามทฤษฎีบท 6 นั้นมีคุณสมบัติทางเรขาคณิตที่อนุญาตให้ใช้จุดบนระนาบในการระบุนคอนฟิกูเรชันของการจับได้ นั่นคือการใช้สองตัวแปรในการระบุนคอนฟิกูเรชันของการจับ เพื่อประกอบการอธิบาย ให้พิจารณารูปที่ 8 โดยข้อกำหนดให้ E_a, E_b, E_c คือ ด้านสามด้านที่เวกเตอร์ตั้งฉากภายใน สเปนทางบวกในระนาบด้วยมุม θ (เป็นไปตามเงื่อนไข Pc ในทฤษฎีบท 6) พิจารณาจุด \mathbf{x}_0 เมื่อฉายกรวยเสียดทานจากจุดนี้ในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากภายในของแต่ละด้านลงบนด้านที่สัมผัสกัน จะได้ผลลัพธ์เป็นส่วนของเส้นตรงดังรูปที่ 8(a) แทนส่วนของเส้นตรงนี้ด้วย E'_a, E'_b, E'_c หากพิจารณาการจับบนตำแหน่ง $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c$ ใด ๆ บนส่วนของเส้นตรงทั้งสามนี้ จะเห็นว่ากรวยเสียดทานสองด้านที่มี $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c$ เป็นจุดยอดจะตัดกันได้เป็นพื้นที่ซึ่งมี \mathbf{x}_0 อยู่ภายในเสมอ (รูปที่ 8(b)) ดังนั้นจุด $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c$ ใด ๆ ที่อยู่ใน E'_a, E'_b, E'_c ตามลำดับ จะสอดคล้องกับเงื่อนไข Pa ในทฤษฎีบท 6 ทำให้เราสามารถแทนเซตของการจับแบบคอนเคอร์เรนที่ด้วยจุด \mathbf{x}_0 ได้

ทฤษฎีบท 7 เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการจับด้วยสามนีวเพื่อทำการจับแบบคอนเคอร์เรนที่คือ เวกเตอร์ตั้งฉากภายในของสามด้านที่ถูกจับสเปนทางบวกบนระนาบด้วยมุม θ และมีจุด \mathbf{x}_0 ซึ่งถ้านำมาใช้เป็นจุดยอดของการวาดกรวยเสียดทานไปในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากภายในจะตัดกับด้านทั้งสาม

นอกจากนี้จุด x_0 ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 7 ยังส่งผลให้ได้ส่วนของเส้นตรง E'_a, E'_b, E'_c เป็นบริเวณสัมผัสอิสระ ซึ่งนี้สามารถวางตัวอยู่ที่ตำแหน่งใด ๆ ในบริเวณนี้จะทำให้เกิดการจับเป็นแบบคอนเคอร์เรนซ์เสมอ สำหรับสามด้านที่กำหนดให้นี้ เราจะขอเรียกเซตของจุด x_0 ที่เป็นไปได้ทั้งหมดว่า *โฟกัสเซลล์ (focus cell)* ของด้าน E_a, E_b และ E_c เพื่อความสะดวกในการอ้างถึงจะขอแทนโฟกัสเซลล์ของทั้งสามด้านนี้ด้วยสัญลักษณ์ $F_{a,b,c}$ การหาโฟกัสเซลล์นี้ทำได้โดยการคำนวณหาอินเตอร์เซกชันของพื้นที่สามพื้นที่ ซึ่งแต่ละพื้นที่หาได้จากการยูเนียนกันของกรวยเสียดทานสองด้านที่มีจุดยอดเป็นจุดทุกจุดบนแต่ละด้านที่ถูกจับ (บริเวณที่แรเงาในรูปที่ 8 (c) แสดงโฟกัสเซลล์) ด้วยวิธีสร้างโฟกัสเซลล์ที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่าการขยายกรวยเสียดทานจากตำแหน่งใด ๆ ในโฟกัสเซลล์ด้วยทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากภายในของแต่ละด้านที่ถูกจับ จะทำให้ได้บริเวณสัมผัสอิสระเสมอ ดังนั้นโฟกัสเซลล์จึงสามารถแทนเซตของการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ได้ และโฟกัสเซลล์นี้เองที่ถูกเขียนให้อยู่ในรูปของจุดยอดในกราฟการสลับนีว

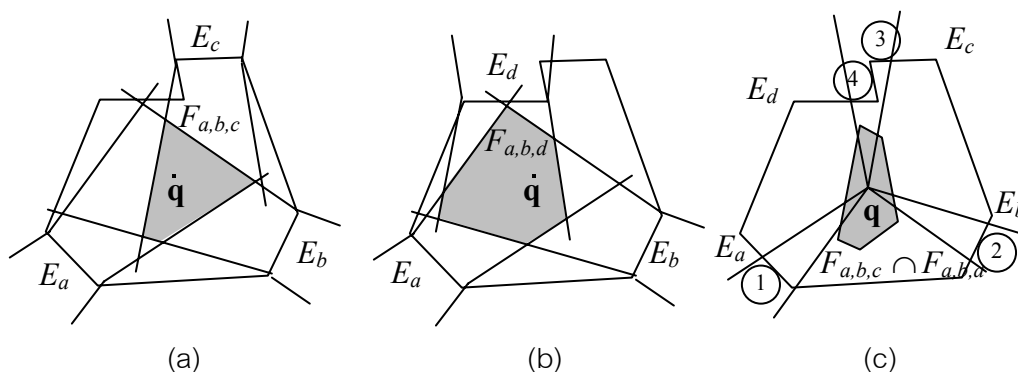


รูปที่ 8 โฟกัสเซลล์สำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์

3.3 การสลับนีวสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์

การสลับนีวระหว่างสองการจับสามารถทำได้เมื่อเซตของสองการจับนั้นมีส่วนที่ซ้อนทับกัน สำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์แล้วเซตของการจับที่กล่าวถึงคือ โฟกัสเซลล์ ดังนั้นการสลับนีวระหว่างการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ที่เกิดขึ้นในส่วนที่เป็นอินเตอร์เซกชันของโฟกัสเซลล์ทั้งสอง พิจารณาสองโฟกัสเซลล์ $F_{a,b,c}$ (รูปที่ 9(a)) และ $F_{a,b,d}$ (รูปที่ 9(b)) ซึ่งมีส่วนที่ซ้อนทับกันดังรูปที่ 9 กำหนดให้ q เป็นจุดที่อยู่ในโฟกัสเซลล์ทั้งสอง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า จุด q อยู่ในเซตของการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์บนสามด้าน E_a, E_b, E_c และอีกสามด้าน E_a, E_b, E_d สมมติให้ n_1, n_2 และ n_3 วางอยู่บนด้าน E_a, E_b และ E_c เพื่อทำการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ที่ถูกแทนด้วยจุด q จะเห็นว่าเราสามารถเปลี่ยนการจับนี้เพื่อให้เป็นการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์บนด้าน E_a, E_b

และ E_d ด้วยการวางตำแหน่งนิ้ว 4 บนจุดใด ๆ ในส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันระหว่างด้าน E_d กับกรวยเสียดทานที่ถูกวาดย้อนกลับ ณ จุด \mathbf{q} ได้ (รูปที่ 9(c)) เมื่อนิ้ว 4 ถูกวางอยู่บนด้าน E_d จะสามารถยกนิ้ว 3 ออกจากด้าน E_c ได้ กระบวนการดังกล่าวนี้ส่งผลให้เกิดการสลับนิ้วจากการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์บนด้าน E_a, E_b, E_c ด้วยนิ้ว 1, 2, 3 ไปเป็นการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์บนด้าน E_a, E_b, E_d ด้วยนิ้ว 1, 2, 4 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์จะเกิดขึ้นได้ตรงส่วนที่โฟกัสเซลล์ทั้งสองซ้อนทับกัน และด้านที่ถูกจับระหว่างสองการจับนี้มีด้านที่ต่างกันหนึ่งด้านเท่านั้น



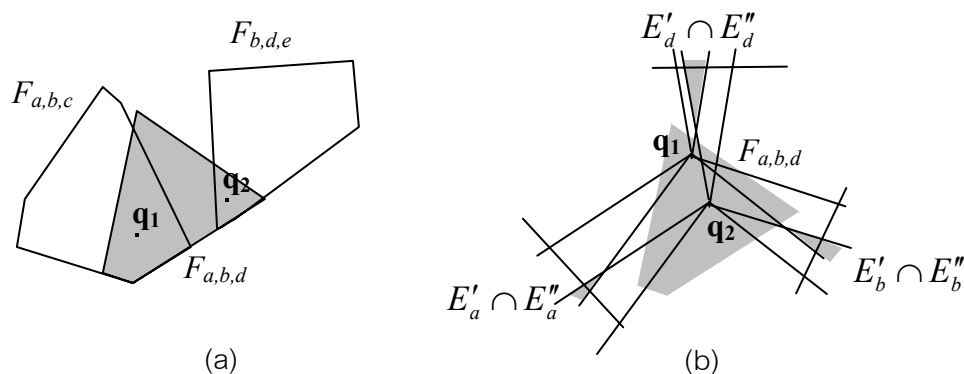
รูปที่ 9 การสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์

3.4 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์

การสลับนิ้วไม่สามารถกระทำได้หากโฟกัสเซลล์ของการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ทั้งสองไม่มีส่วนที่ซ้อนทับกันดังแสดงในรูปที่ 10(a) เราจะสังเกตเห็นว่า $F_{a,b,c} \cap F_{b,d,e} = \phi$ ดังนั้นจึงไม่มีโอกาสที่จะทำการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์บนด้าน E_a, E_b, E_c กับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์บนด้าน E_b, E_d, E_e แต่ถึงกระนั้นหากเราสมมติให้จุด \mathbf{q}_1 อยู่ในโฟกัสเซลล์ $F_{a,b,c}$ และ $F_{a,b,d}$ ซึ่งสามารถทำการสลับนิ้วเพื่อเปลี่ยนเป็นการจับบนด้าน E_a, E_b, E_d ได้ หลังจากการสลับนิ้วแล้วหากสามารถปรับเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วซึ่งเกิดการจับที่แทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 ให้เป็นการจับที่แทนด้วยจุด \mathbf{q}_2 ในพื้นที่ $F_{a,b,d} \cap F_{b,d,e}$ จะส่งผลให้สามารถทำการสลับนิ้วจากการจับบนด้าน E_a, E_b, E_d เป็นการจับบนด้าน E_b, E_d, E_e ตามต้องการได้

กระบวนการเปลี่ยนการจับที่แทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 ให้เป็นการจับที่แทนด้วยจุด \mathbf{q}_2 โดยที่ทั้งสองจุดนี้อยู่ในโฟกัสเซลล์เดียวกันคือการจัดวางนิ้วนั่นเอง การจัดวางนิ้วสามารถทำได้ด้วยการเลื่อนนิ้ว หมุนนิ้ว หรือการสลับนิ้วในบริเวณสัมผัสอิสระ โดยเชื่อมั่นได้ว่าในระหว่างกระบวนการดังกล่าวนี้ การจับวัตถุยังคงคุณสมบัติฟอซโคลสเซอร์ตลอดทั้งกระบวนการ ดังแสดง

ในรูปที่ 10(b) ซึ่งกำหนดให้จุด \mathbf{q}_1 และ \mathbf{q}_2 อยู่ในโพลีโงนเชลล์ $F_{a,b,d}$ ทั้งคู่ เมื่อเราวาดกรวยเสียดทานในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากของด้านทั้งสามที่จุด \mathbf{q}_1 ไปตัดกับด้านทั้งสามส่งผลให้ได้บริเวณสัมผัสอิสระ E'_a, E'_b, E'_d และทำเช่นเดียวกันนี้กับจุด \mathbf{q}_2 ได้บริเวณสัมผัสอิสระ E''_a, E''_b, E''_d เริ่มด้วยการจับเริ่มต้นโดยนิ้วทั้งสามอยู่ที่ตำแหน่ง $\mathbf{x}_a \in E'_a$, $\mathbf{x}_b \in E'_b$ และ $\mathbf{x}_d \in E'_d$ ซึ่งถูกแทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 แล้วทำการเคลื่อนย้ายนิ้วจากตำแหน่ง \mathbf{x}_i ไปยัง $\mathbf{x}'_i \in E'_i \cap E''_i$ ($i = a, b, d$) จะเห็นได้ว่าการจับในตำแหน่ง \mathbf{x}'_i ($i = a, b, d$) สามารถแทนด้วยจุด \mathbf{q}_2 นอกจากนี้ยังมั่นใจได้ว่าการจับวัตถุยังคงคุณสมบัติฟร็อกโคสเซอร์ตลอดขั้นตอนการเคลื่อนที่ของนิ้วในบริเวณสัมผัสอิสระที่เกิดจากจุด \mathbf{q}_1 นอกเหนือจากการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วด้วยการเลื่อนนิ้ว หรือหมุนนิ้วแล้วยังสามารถนำการสลับนิ้วมาใช้ในแต่ละบริเวณสัมผัสอิสระได้ โดยทำการวางนิ้วที่ไม่เกี่ยวข้องกับการจับในขณะนั้นไว้ ณ ตำแหน่ง \mathbf{x}'_i แล้วยกนิ้วที่ตำแหน่ง \mathbf{x}_i ออก แต่ด้วยข้อกำหนดของจำนวนนิ้วที่ใช้ในการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ ทำให้มีเพียงนิ้วเดียวที่ไม่เกี่ยวข้องกับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ในขณะใด ๆ การสลับนิ้วจึงทำได้ในบริเวณสัมผัสอิสระเดียวเท่านั้นในเวลาใดเวลาหนึ่ง และด้วยความต่อเนื่องในโพลีโงนเชลล์เดียวกันทำให้ทุกจุดในโพลีโงนเชลล์มีจุดใกล้เคียงเสมอ ซึ่งการวาดกรวยเสียดทานในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากของด้านทั้งสามที่มีจุดยอดคือจุดใกล้เคียงกันย่อมได้บริเวณสัมผัสอิสระที่ซ้อนทับกัน ดังนั้นเราจึงสามารถทำการจัดวางนิ้วระหว่างการจับที่ถูกแทนด้วยจุดใด ๆ ในโพลีโงนเชลล์เดียวกันได้เสมอ



รูปที่ 10 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์

3.5 การคำนวณหากราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์

เซตของการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ที่ต้องการคำนวณหาคือโพลีโงนเชลล์ การที่เราจะสามารถคำนวณหาทุกโพลีโงนเชลล์สิ่งที่ต้องคำนึงถึงก็คือด้านของวัตถุหลายเหลี่ยมสามด้านใด ๆ ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 7 วิธีหนึ่งที่ทำได้คือ นำทุก ๆ สามด้านมาทำการทดสอบว่าตรงตาม

เงื่อนไขของทฤษฎีบท 7 หรือไม่ แต่เราสามารถลดจำนวนของสามด้านที่จะทำการพิจารณาได้ด้วย การนำเงื่อนไขที่ว่า เวกเตอร์ตั้งฉากของทั้งสามด้านต้องสลับเส้นทางบวกลบระนาบด้วยมุม θ โดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอัลกอริทึมในการหาสามด้านที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 7

อัลกอริทึมที่ขอนำเสนอนี้อาศัยโครงสร้าง *EdgeStruct* เพื่อใช้เก็บข้อมูลเกี่ยวกับแต่ละด้านประกอบด้วย (1) *id* คือตัวเลขเฉพาะของแต่ละด้าน และ (2) *normalAngle* เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ตั้งฉากของด้านนั้นกับแกน x ในหน่วยเรเดียนมีค่าจาก 0 ถึง 2π ข้อมูลที่รับเข้ามาคือแถวลำดับ *allEdge*[1..*n*] ซึ่งเก็บ *EdgeStruct* ของทุกด้าน อัลกอริทึมนี้เริ่มด้วยการจัดเรียง *allEdge* ในลำดับที่เพิ่มขึ้นของค่า *normalAngle* แล้วสร้างแถวลำดับ *upper*[1..*m*₁] เพื่อเก็บทุก *EdgeStruct* ที่มีค่า *normalAngle* อยู่ในช่วง $[0, \pi)$ และแถวลำดับ *lower*[1..*m*₂] เก็บทุก *EdgeStruct* ที่อยู่นอกชุดลำดับ *upper* แล้วทำการจัดเรียง *upper* ในลำดับที่เพิ่มขึ้นของค่า *normalAngle* และทำการจัดเรียง *lower* ในลำดับที่ลดลงของค่า *normalAngle* (ใช้เวลา $O(n)$ เนื่องจาก *upper* และ *lower* ถูกสร้างจาก *allEdge* ซึ่งถูกจัดเรียงมาแล้ว) แล้วทำตามขั้นตอนดังจะขออธิบายด้วยรหัสเทียมดังนี้

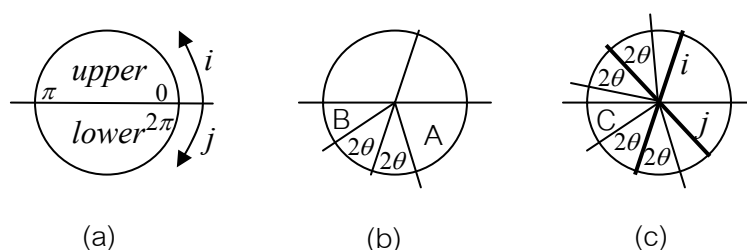
```

1: for  $i = 1$  to  $m_1$  do
2:    $\alpha = upper[i].normalAngle$ 
3:    $j = 1$ 
4:   while  $j \leq m_2$  and  $lower[j].normalAngle > \alpha + \pi + 2\theta$  do
5:      $\beta = lower[j].normalAngle$ 
6:     for each  $k$  such that
7:        $allEdge[k].normalAngle > \beta - \pi + 2\theta$  and
7:        $allEdge[k].normalAngle < \alpha + \pi - 2\theta$  do
7:         generate candidate triple of edges:
7:         { $upper[i].id, lower[j].id, allEdge[k].id$ }
8:      $j = j + 1$ 

```

อัลกอริทึมนี้ทำการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากมาหนึ่งเวกเตอร์เพื่อจำกัดขอบเขตของการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์ถัดไป โดยทำการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากตัวแรกจาก *upper* (บรรทัดที่ 1) และเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากที่สองจาก *lower* (บรรทัดที่ 4) ตามหลักที่ว่าเวกเตอร์สามเวกเตอร์ที่สลับเส้นทางบวกลบระนาบด้วยมุม θ จะไม่อยู่ในครึ่งวงกลมเดียวกัน เมื่อเวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์แรกถูกเลือกแล้ว เวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์ที่สองต้องทำมุมกับเวกเตอร์แรกน้อยกว่า $\pi - 2\theta$ ซึ่งคือการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์ที่สองในครึ่งวงกลมล่างและอยู่ภายนอกกรวยที่มีกึ่งกลางคือเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์แรกด้วยครึ่งมุม 2θ (รูปที่ 11(b)) ส่งผลให้ได้สองพื้นที่ซึ่งเวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์ที่สองมีสิทธิ์ที่จะถูกเลือก (พื้นที่ A และ B

ในรูปที่ 11) แต่พื้นที่ที่มีค่ามุมน้อยกว่า (พื้นที่ B) ไม่จำเป็นต้องให้ความสนใจเนื่องจากการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์ที่สองจากพื้นที่นี้ทำให้ได้เวกเตอร์ตั้งฉากเวกเตอร์ที่สามซึ่งเคยถูกเลือกมาในการพิจารณารอบก่อนหน้าแล้ว ทำให้เกิดการพิจารณาสามเวกเตอร์เดียวกันซ้ำอีกครั้ง ดังนั้นเวกเตอร์ที่สองจึงทำการเลือกจากพื้นที่ A เท่านั้น หลังจากทำการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากสองเวกเตอร์แล้ว การเลือกเวกเตอร์ที่สามจะถูกจำกัดขอบเขตด้วยข้อกำหนดของการสลับทิศทางบวกบนระนาบด้วยมุม θ ของทั้งสามเวกเตอร์ (บรรทัดที่ 6 และพื้นที่ C ในรูปที่ 11(c)) หลังจากทำการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของทั้งสามด้านขั้นตอนต่อไปคือการหาฟังก์ชันเซลล์ของการจับบนสามด้านนั้น ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.2



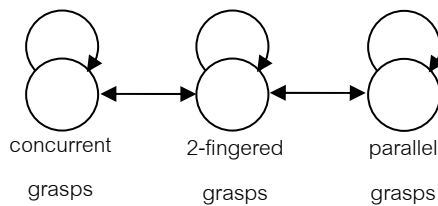
รูปที่ 11 การเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของสามด้านสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์

เมื่อได้ครบทุกจุดยอดในกราฟที่ระบุทุกการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์แล้ว สิ่งที่ต้องคำนวณหาต่อไปคือเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดในกราฟ เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้กำหนดให้มือหุ่นยนต์มีนิ้วจำนวนสี่นิ้ว ดังนั้นจุดยอดสองจุดที่จะนำมาพิจารณาหาเส้นเชื่อมต้องแทนสองการจับที่มีด้านต่างกันหนึ่งด้าน โดยสองจุดยอดนั้นจะเชื่อมต่อกันเมื่อฟังก์ชันเซลล์ที่สัมพันธ์กับจุดยอดทั้งสองมีส่วนที่ซ้อนทับกัน ตำแหน่งของนิ้วที่สามารถทำการสลับนิ้วระหว่างการจับของสองจุดยอดหาได้จากการพิจารณาจุดที่อยู่ในอินเตอร์เซกชันของทั้งสองฟังก์ชันเซลล์ การจับที่แทนด้วยจุดดังกล่าวจะสามารถรักษาตำแหน่งของสองนิ้วในขณะที่สามารถสลับนิ้วที่สามเพื่อเปลี่ยนการจับ นอกจากนี้แต่ละจุดยอดในกราฟยังแสดงถึงความสามารถในการจัดวางนิ้วระหว่างการจับที่ถูกแทนด้วยจุดในฟังก์ชันเซลล์เดียวกันด้วย ที่ทำเช่นนี้ได้เพราะความต่อเนื่องในฟังก์ชันเซลล์ทำให้สามารถรักษาการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ได้โดยรักษาตำแหน่งของสองนิ้วและเลื่อนตำแหน่งของนิ้วที่สามอย่างต่อเนื่องในบริเวณสัมผัสอิสระ

บทที่ 4

กราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบขนาน

ในบทนี้จะขอกล่าวถึงการคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับอีกสองแบบที่เหลือคือ การจับด้วยสองนิ้วในหัวข้อที่ 4.1 และการจับแบบขนานในหัวข้อที่ 4.2 การจับด้วยสองนิ้วถือว่ามีบทบาทที่สำคัญในฐานะที่เป็นตัวเชื่อมโยงระหว่างการจับแบบคอนเคอร์เรนท์และการจับแบบขนาน ซึ่งการจับทั้งสองแบบนี้ไม่สามารถทำการสลับนิ้วระหว่างกันได้โดยตรงด้วยเงื่อนไขของเวกเตอร์ตั้งฉากสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์และการจับแบบขนานทำให้เวกเตอร์ตั้งฉากสองเวกเตอร์ใด ๆ ที่ทำการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของการจับแบบขนาน การจับด้วยสองนิ้วจึงถูกนำมาเป็นตัวกลางในการสลับนิ้ว ดังนั้นการสลับนิ้วระหว่างการจับใด ๆ จึงเป็นไปตามแผนภาพในรูปที่ 12



รูปที่ 12 แผนภาพการสลับนิ้ว

คอนฟิเกอรัลของการจับด้วยสองนิ้วถูกระบุด้วยจุดบนระนาบเหมือนกับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ ทำให้การสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนท์หาได้จากการตัดกันของไฟกัสเซิล ในขณะที่คอนฟิเกอรัลของการจับแบบขนานถูกระบุด้วยตำแหน่งบนด้านทั้งสาม ส่งผลให้เซตของการจับแบบขนานที่แท้จริงเป็นปริมาตรในสามมิติที่มีความซับซ้อนในการคำนวณ วิทยานิพนธ์นี้จึงขอเสนอวิธีการหาเซตของการจับแบบขนาน โดยพิจารณาการวางตัวของด้านทั้งสามแทนการหาเซตของการจับแบบขนานโดยตรงในหัวข้อที่ 4.2.1 และด้วยความแตกต่างของการระบุคอนฟิเกอรัลของการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบขนาน วิทยานิพนธ์นี้จึงขอเสนอวิธีการสลับนิ้วระหว่างการจับทั้งสองแบบนี้ในหัวข้อที่ 4.2.2

4.1 กราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว

การจับด้วยสองนิ้วถือว่ามีค่าสำคัญเนื่องจากใช้นิ้วจำนวนน้อยกว่า ส่งผลให้การสลับนิ้วมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากกว่าการจับด้วยสามนิ้ว อีกทั้งการจับด้วยสองนิ้วยังสามารถทำ

การเชื่อมโยงการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์และการจับแบบขนานซึ่งไม่สามารถทำการสลับนิวระหว่าง การจับสองแบบนี้ได้โดยตรง หัวข้อที่ 4.1.1 จะกล่าวถึงการระบุคอนฟิกูเรชันของการจับด้วยสอง นิวด้วยจุดบนระนาบ จากนั้นจะกล่าวถึงการสลับนิวในหัวข้อที่ 4.1.2 นอกจากการสลับนิว ระหว่างการจับด้วยสองนิวแล้ว ยังจะกล่าวถึงการสลับนิวระหว่างการจับด้วยสองนิวและการจับ แบบคอนเคอร์เรนซ์ ตามด้วยการจัดวางนิวในหัวข้อที่ 4.1.3 และหัวข้อที่ 4.1.4 จะอธิบายถึง วิธีการคำนวณกราฟการสลับนิวสำหรับการจับด้วยสองนิว

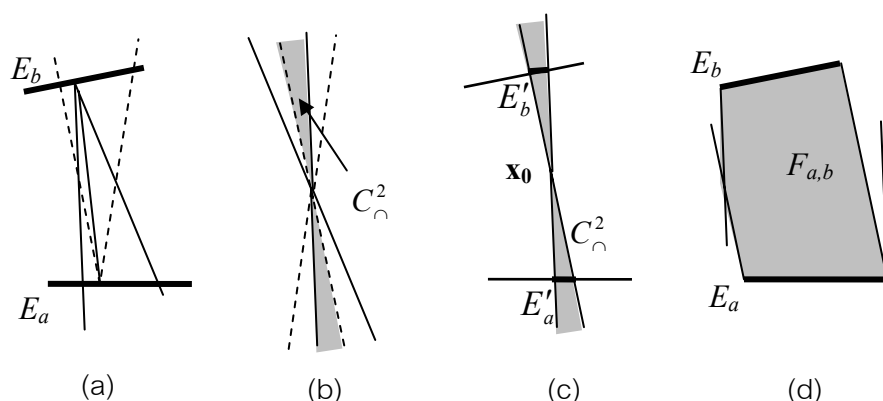
4.1.1 การแทนการจับด้วยสองนิว

การจับด้วยสองนิวสามารถถูกแทนด้วยจุดบนระนาบด้วยการดัดแปลงเพียง เล็กน้อยจากการแทนการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ เพื่อความเข้าใจขอให้พิจารณารูปที่ 13(a) ซึ่ง แสดงการจับด้วยสองนิวที่จุด x_a บนด้าน E_a และจุด x_b บนด้าน E_b ตามทฤษฎีบท 3 เมื่อ พิจารณาถึงเงื่อนไขที่เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดนี้จะต้องวางตัวอยู่ในกรวยเสียดทางสองด้าน ทั้ง สองกรวย เงื่อนไขนี้เป็นจริงเมื่อนำกรวยเสียดทานสองด้านทั้งสองกรวยมาวาดที่จุดเดียวกันแล้วมี ส่วนตัดกันดังกรวย C_α^2 ที่แรเงาในรูปที่ 13(b) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าการที่จะมีส่วนตัดกันของ กรวยเสียดทานก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ตั้งฉากของสองด้านที่เกี่ยวข้องทำมุมกันอยู่ในช่วง $(\pi - 2\theta, \pi + 2\theta)$ และกรวย C_α^2 นี้ทำให้เราสามารถทำการแทนการจับสองนิวด้วยจุดบนระนาบ โดยการวาดกรวย C_α^2 ที่มีจุดยอดคือจุด x_0 ไปตัดกับด้านที่ถูกจับทั้งสองด้านแล้วได้ส่วนของ เส้นตรง E'_a และ E'_b ซึ่งส่วนของเส้นตรงสองเส้นนี้ก็คือบริเวณสัมผัสสัมผัสระตามที่ [5] ได้กล่าวไว้ นั่นเอง (รูปที่ 13(c)) โดยไม่ว่านิวจะวางอยู่ที่ตำแหน่งใดในบริเวณสัมผัสสัมผัสระยอมเป็นการจับด้วย สองนิวที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3 เสมอ ดังนั้นจุด x_0 จึงสามารถแทนเซตของการจับด้วยสองนิว ได้ และขอสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 8 เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับจุดจับสองจุดเพื่อให้เกิดการจับที่ อยู่ในสภาพสมดุลคือ เวกเตอร์ทั้งสองที่ตั้งฉากกับด้านที่สัมผัสและมีทิศทางพุ่งเข้าหาเนื้อวัตถุทำ มุมกันอยู่ในช่วง $(\pi - 2\theta, \pi + 2\theta)$ และมีจุด x_0 ซึ่งถ้านำมาใช้เป็นจุดยอดของการวาดกรวย C_α^2 จะตัดกับด้านทั้งสอง

สิ่งที่มีความสัมพันธ์ระหว่างการจับด้วยสองนิวและจุดยอดในกราฟคือเซตของ การจับด้วยสองนบบนสองด้านที่กำหนดให้ ซึ่งเซตนี้คือพื้นที่บนระนาบที่ครอบคลุมตำแหน่ง x_0 ที่ สอดคล้องกับทฤษฎีบท 8 สำหรับสองด้านนั้น เราจะขอเรียกพื้นที่ดังกล่าวว่า โฟกัสเซลล์ ของด้าน E_a และ E_b ขอแทนโฟกัสเซลล์นี้ด้วยสัญลักษณ์ $F_{a,b}$ การหาโฟกัสเซลล์นี้ทำได้โดยการ

คำนวณหาอินเตอร์เซกชันของสองพื้นที่ซึ่งแต่ละพื้นที่หาได้จากการยูเนียนกันของกรวย C_{\cap}^2 ที่มีจุดยอดคือทุกจุดของแต่ละด้านที่ถูกจับ (บริเวณที่แรเงาในรูปที่ 13(d) แสดงไฟกัสเซลล์) ด้วยวิธีสร้างไฟกัสเซลล์ที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าการวาดกรวย C_{\cap}^2 ที่มีจุดยอดคือตำแหน่งใด ๆ ในไฟกัสเซลล์ไปตัดกับด้านที่ถูกจับ จะทำให้ได้บริเวณสัมผัสสัมผัสระฆัง ดังนั้นไฟกัสเซลล์จึงสามารถแทนเซตของการจับด้วยสองนิ้ว และไฟกัสเซลล์นี้เองคือพื้นที่บนระนาบที่มีความสัมพันธ์กับจุดยอดในกราฟการสลับนิ้ว



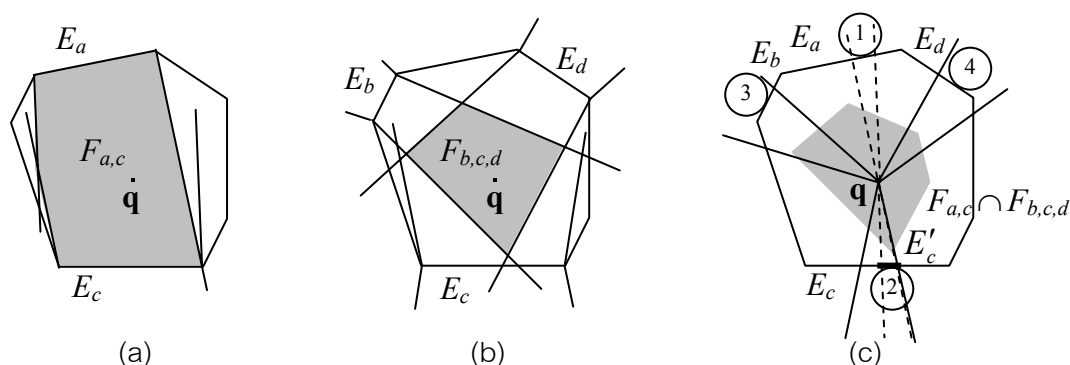
รูปที่ 13 การสร้างไฟกัสเซลล์สำหรับการจับด้วยสองนิ้ว : กรวยเสียดทานสองด้าน 2 กรวยแทนด้วยกรวยที่มีเส้นขอบสีดำ และเส้นประ

4.1.2 การสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว

การสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้วสามารถทำได้ระหว่างการจับสองนิ้วด้วยกันเอง หรือระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับด้วยสามนิ้ว ทั้งแบบคอนเคอร์เรนซ์และแบบขนาน เมื่อพิจารณาถึงข้อกำหนดในวิทยานิพนธ์นี้คือการใช้มือหุ่นยนต์ที่มีสี่นิ้ว ส่งผลให้สามารถทำการสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วบนสองด้านที่ต่างกันได้เสมอ ดังนั้นจุดยอดในกราฟที่แทนการจับด้วยสองนิ้วทุกจุดยอดจึงมีเส้นเชื่อมระหว่างกันเสมอ

คอนฟิกรेशनของการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์ถูกระบุด้วยรูปแบบเดียวกันคือจุดบนระนาบ ดังนั้นการสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์จึงสามารถอธิบายด้วยการพิจารณาไฟกัสเซลล์ $F_{a,c}$ และ $F_{b,c,d}$ โดยที่ $F_{a,c} \cap F_{b,c,d} \neq \emptyset$ ดังรูปที่ 14 ซึ่งมีจุด \mathbf{q} เป็นจุดที่อยู่ในบริเวณ $F_{a,c} \cap F_{b,c,d}$ นั้นหมายความว่า \mathbf{q} อยู่ในเซตของการจับด้วยสองนิ้วบนด้าน E_a และ E_c อีกทั้งยังอยู่ในเซตของการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์บนด้าน E_b, E_c และ E_d เริ่มจากการจับด้วยสองนิ้วที่ถูกแทนด้วยจุด \mathbf{q} โดยนิ้ว 1 และ 2 บน

ด้าน E_a และ E_c เห็นได้ชัดว่าเราสามารถทำการจับแบบคอนเคอร์เรนทีบนด้าน E_b, E_c และ E_d ด้วยการวางนิ้ว 3 และ 4 ลงบนตำแหน่งใด ๆ ในส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการวาดกรวยเสียดทานที่จุด \mathbf{q} ย้อนกลับไปในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากของด้าน E_b และ E_d เพื่อให้ตัดกับด้านทั้งสองแล้วได้ส่วนของเส้นตรงดังกล่าว เมื่อนิ้ว 3 และ 4 ถูกวางอยู่บนด้าน E_b และ E_d นิ้ว 1 สามารถยกออกจากด้าน E_a ได้ ส่งผลให้เกิดการสลับนิ้วจากการจับด้วยสองนิ้วบนด้าน E_a และ E_c ไปเป็นการจับแบบคอนเคอร์เรนทีบนด้าน E_b, E_c และ E_d สิ่งที่ต้องคำนึงถึงอีกจุดหนึ่งคือ ตำแหน่งของนิ้วบนด้านที่ถูกจับร่วมกันระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนที พิจารณารูปที่ 14(c) ซึ่งทำการวาดกรวยเสียดทานย้อนกลับไปยังด้าน E_c ที่เป็นด้านร่วมระหว่างสองการจับนี้ จะเห็นได้ว่าส่วนของเส้นตรง E'_c ที่เกิดจากการตัดกันของกรวย C_1^2 กับด้าน E_c เป็นเซตย่อยของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันระหว่างกรวยเสียดทานที่ถูกวาดในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากของด้าน E_c กับด้าน E_c ดังนั้นนิ้ว 1 จะต้องวางตัวอยู่ใน E'_c จึงจะสามารถทำการสลับนิ้วได้ จากการกล่าวถึงลำดับของการสลับนิ้วข้างต้น ส่งผลให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นเชื่อมในกราฟการสลับนิ้วกับเซตของการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนที ซึ่งเซตนี้หาได้จากการตัดกันของสองโพลีเซลล์ที่มีด้านร่วมกันหนึ่งด้านนั่นเอง



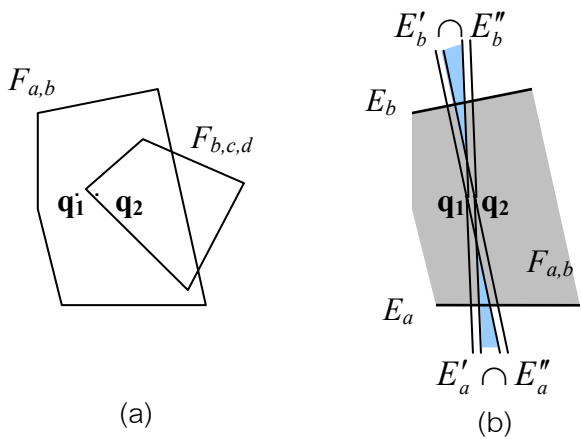
รูปที่ 14 การสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนที

4.1.3 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว

การสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและสามนิ้วในบางครั้งอาจไม่สามารถกระทำได้ทันทีหลังจากการสลับนิ้วครั้งก่อนหน้า ยกตัวอย่างดังรูปที่ 15(a) หากต้องการทำการสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วที่ถูกแทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 บนด้าน E_a และ E_b เพื่อให้เป็นการจับแบบคอนเคอร์เรนทีบนด้าน E_b, E_c และ E_d จะเห็นว่าไม่สามารถทำได้ทันทีเนื่องจากจุด \mathbf{q}_1 ไม่อยู่ในโพลีเซลล์ของด้าน E_b, E_c และ E_d ดังนั้นหากเราทำการเปลี่ยนแปลงการจับด้วยสองนิ้วที่ถูก

แทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 ไปเป็นการจับที่ถูกแทนด้วย \mathbf{q}_2 ซึ่งอยู่ใน $F_{a,b}$ และ $F_{b,c,d}$ ก็จะสามารถทำการสลับนิ้วเพื่อให้เปลี่ยนเป็นการจับแบบคอนเคอร์เรนทีบนด้าน E_b, E_c และ E_d ตามต้องการได้ ซึ่งการเปลี่ยนการจับที่ถูกแทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 ไปเป็นการจับที่ถูกแทนด้วย \mathbf{q}_2 ซึ่งอยู่ในโฟกัสเซลล์เดียวกันก็คือ การจัดวางนิ้วนั่นเอง

การจัดวางนิ้วคือการเปลี่ยนแปลงการจับใดๆ ที่ถูกแทนด้วยจุดในโฟกัสเซลล์เดียวกันโดยอาศัยหลักการของบริเวณสัมผัสอิสระ ซึ่งสามารถทำการจัดวางนิ้วได้โดยการเลื่อนนิ้วหมุนนิ้ว หรือการสลับนิ้วภายในบริเวณสัมผัสอิสระ ทำให้มั่นใจได้ว่าในระหว่างกระบวนการจัดวางนิ้ว การจับก็ยังคงคุณสมบัติฟอร์ซโคลสเซอร์อยู่ตลอด ดังจะอธิบายโดยอาศัยรูปที่ 15(b) ซึ่งแสดงการจับที่ถูกแทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 และ \mathbf{q}_2 โดยทั้งสองจุดนี้อยู่ในโฟกัสเซลล์ $F_{a,b}$ ทั้งคู่ เมื่อเราวาดกรวย C_1^2 ที่จุด \mathbf{q}_1 ไปตัดกับด้าน E_a และ E_b ทำให้ได้บริเวณสัมผัสอิสระ E'_a และ E'_b เช่นเดียวกับกับจุด \mathbf{q}_2 เมื่อวาดกรวย C_2^2 ไปตัดกับทั้งสองด้านนั้นทำให้ได้บริเวณสัมผัสอิสระ E''_a และ E''_b สมมติให้นิ้วทั้งสองวางตัวอยู่ที่ตำแหน่ง $\mathbf{x}_a \in E'_a$ และ $\mathbf{x}_b \in E'_b$ นิ้วทั้งสองสามารถเคลื่อนย้ายจากตำแหน่ง \mathbf{x}_i ไปยัง $\mathbf{x}'_i \in E'_i \cap E''_i$ ($i = a, b$) ทำให้เราสามารถทำการจัดวางนิ้วเพื่อเปลี่ยนการจับที่แทนด้วยจุด \mathbf{q}_1 ไปเป็นการจับที่ถูกแทนด้วยจุด \mathbf{q}_2 โดยในระหว่างกระบวนการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้ว การจับนั้นยังคงคุณสมบัติฟอร์ซโคลสเซอร์ในบริเวณสัมผัสอิสระที่เกิดจากจุด \mathbf{q}_1 อยู่ตลอด และด้วยเหตุผลที่ว่าพื้นที่ของโฟกัสเซลล์นั้นมีความต่อเนื่องกัน ดังนั้นเราจึงสามารถทำการจัดวางนิ้วระหว่างการจับที่ถูกแทนด้วยจุดใด ๆ ในโฟกัสเซลล์เดียวกันได้เสมอ



รูปที่ 15 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว

4.1.4 การคำนวณหากราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว

ในกรณีการจับด้วยสองนิ้ว สิ่งที่มีความสัมพันธ์กับจุดยอดในกราฟคือโฟกัสเซลล์ และสิ่งที่ต้องคำนึงถึงก่อนที่จะทำการคำนวณโฟกัสเซลล์คือเวกเตอร์ตั้งฉากของสองด้าน หากการทำมุมของเวกเตอร์ทั้งสองสอดคล้องกับทฤษฎีบท 8 จึงจะทำการคำนวณหาโฟกัสเซลล์ของการจับบนสองด้านนั้น

อัลกอริทึมนี้ใช้ข้อมูลแถวลำดับ $allEdge[1..n]$ ซึ่งเก็บ $EdgeStruct$ ของทุกด้าน โดยทำการจัดเรียง $allEdge$ ในลำดับที่เพิ่มขึ้นของค่า $normalAngle$ แล้วสร้างแถวลำดับ $upper[1..m_1]$ เพื่อเก็บทุก $EdgeStruct$ ที่มีค่า $normalAngle$ อยู่ในช่วง $[0, \pi)$ และแถวลำดับ $lower[1..m_2]$ เก็บทุก $EdgeStruct$ ที่อยู่นอกชุดลำดับ $upper$ ซึ่ง $upper$ และ $lower$ ได้ถูกจัดเรียงในลำดับที่เพิ่มขึ้นของค่า $normalAngle$ เรียบร้อยแล้ว ต่อจากนั้นทำตามขั้นตอนดังจะขออธิบายด้วยรหัสเทียมดังนี้

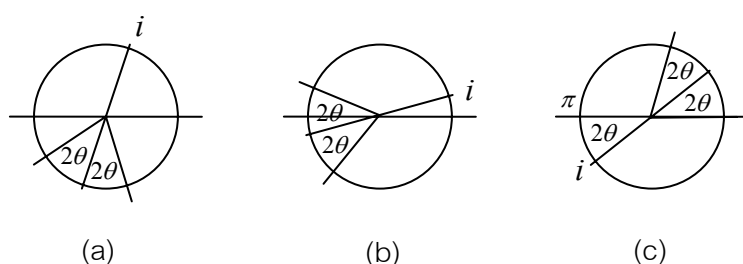
```

1:  $i = 1$ 
2: while  $i \leq n$  and  $allEdge[i].normalAngle < \pi + 2\theta$  do
3:    $\alpha = allEdge[i].normalAngle$ 
4:   if  $\alpha < 2\theta$  do
5:      $j = m_1$ 
6:      $k = 1$ 
7:     while  $upper[j].normalAngle > \alpha + \pi - 2\theta$ 
8:       generate candidate couple of edges:
           $\{allEdge[i].id, upper[j].id\}$ 
9:        $j = j - 1$ 
10:    while  $lower[k].normalAngle < \alpha + \pi + 2\theta$ 
11:      generate candidate couple of edges:
           $\{allEdge[i].id, lower[k].id\}$ 
12:       $k = k + 1$ 
13:    else
14:      for each  $j$  such that
15:         $lower[j].normalAngle > \alpha + \pi - 2\theta$  and
16:         $lower[j].normalAngle < \alpha + \pi + 2\theta$  do
17:          generate candidate couple of edges:
               $\{allEdge[i].id, lower[j].id\}$ 
18:     $i = i + 1$ 

```

เริ่มด้วยการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากแรกจาก $allEdge$ (บรรทัดที่ 1) เวกเตอร์ที่สองจะถูกกำหนดให้อยู่ภายในในรอยที่มีกึ่งกลางคือเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์แรกด้วยครึ่งมุม 2θ ดังรูปที่ 16(a) หากเวกเตอร์นี้ทำมุมกับแกน x น้อยกว่า 2θ จะเห็นว่าการเลือกเวกเตอร์ที่สองจำเป็นต้องพิจารณาเวกเตอร์ตั้งฉากที่อยู่ใน $upper$ ด้วยดังรูปที่ 16(b) (บรรทัดที่ 4 ถึง

12) นอกเหนือจากกรณีนี้แล้วเวกเตอร์ที่สองจะอยู่ใน *lower* เท่านั้น เพื่อไม่ให้เกิดการเลือกสองเวกเตอร์ที่เคยทำการพิจารณามาก่อนหน้านี้ (บรรทัดที่ 13 ถึง 17) และจะเห็นว่าการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากแรกนั้น เราสามารถให้ความสนใจเฉพาะเวกเตอร์ที่ทำมุมกับแกน x น้อยกว่า $\pi + 2\theta$ ก็เพียงพอ เพราะหากเราเลือกเวกเตอร์แรกทีนอกเหนือจากขอบเขตนี้จะไม่เหลือเวกเตอร์ใน *lower* ที่ทำมุมกับเวกเตอร์แรกอยู่ในช่วง $(\pi - 2\theta, \pi + 2\theta)$ ดังรูปที่ 16(c) (บรรทัดที่ 2) หลังจากเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของทั้งสองด้านแล้ว นำทั้งสองด้านดังกล่าวนี้มาคำนวณหาไฟกัสเซลล์ หากมีไฟกัสเซลล์นั้นหมายถึงการมีจุดยอดในกราฟซึ่งแทนการจับบนสองด้านนี้



รูปที่ 16 การเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของสองด้านสำหรับการจับด้วยสองนิ้ว

เมื่อเราได้ทุกไฟกัสเซลล์สำหรับการจับด้วยสองนิ้ว สิ่งที่ต้องคำนวณหาต่อคือเส้นเชื่อมในกราฟการสลับนิ้ว สำหรับการจับด้วยสองนิ้วสองแบบใด ๆ จะมีเส้นเชื่อมระหว่างกันเสมอ แต่สำหรับการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ จะมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่แทนการจับสองแบบนี้ก็ต่อเมื่อ การจับทั้งสองมีด้านต่างกันหนึ่งด้าน และไฟกัสเซลล์ของการจับทั้งสองมีส่วนที่ซ้อนทับกัน ซึ่งส่วนที่ซ้อนทับกันของไฟกัสเซลล์เป็นสิ่งที่สื่อถึงความสามารถในการสลับนิ้วระหว่างการจับทั้งสอง

4.2 กราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน

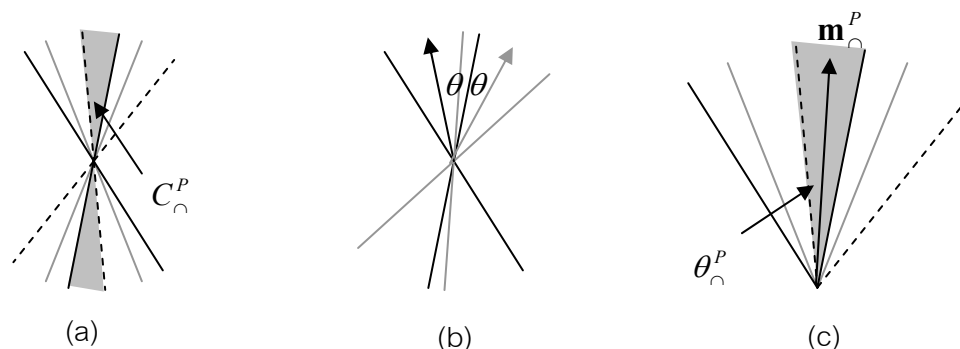
นอกจากการจับแบบคอนเคอร์เรนท์แล้ว การจับด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้วอีกกรณีคือการจับแบบขนาน การจับแบบขนานถูกแทนด้วยตำแหน่งบนด้านทั้งสามที่เกี่ยวข้อง โดยมีข้อกำหนดต่าง ๆ ดังจะขอกกล่าวในหัวข้อที่ 4.2.1 ด้วยข้อกำหนดนี้จะทำการเสนอวิธีหาเซตของการจับแบบขนานซึ่งมีความสัมพันธ์กับจุดยอดในกราฟการสลับนิ้ว จากนั้นจะขอกกล่าวถึงการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบขนานในหัวข้อที่ 4.2.2 ซึ่งในหัวข้อนี้จะแสดงถึงการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบขนานด้วยกันเอง รวมถึงการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว แต่ด้วยการระบุคอนฟิกรูชันที่ต่างกันของการจับทั้งสองแบบนี้ ทำให้การคำนวณการสลับนิ้วต้อง

อาศัยการแปลงการระบุคอนฟิกรูชันของการจับด้วยสองนิ้วให้อยู่ในรูปของตำแหน่งบนด้านที่เกี่ยวข้อง ในหัวข้อที่ 4.2.3 จะเสนอการจัดวางนิ้ว และหัวข้อที่ 4.2.4 จะอธิบายถึงวิธีการคำนวณหากราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน

4.2.1 เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการจับแบบขนาน

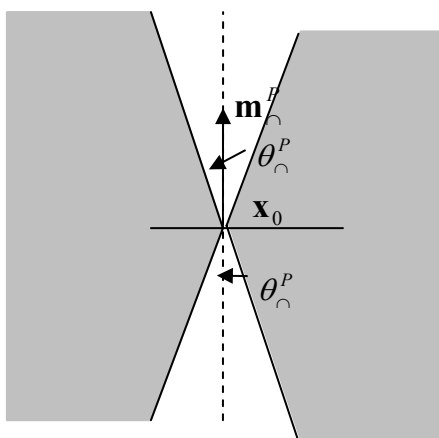
การจับแบบขนานถูกระบุด้วยคอนฟิกรูชันของการจับด้วยสามนิ้วบนด้านทั้งสามซึ่งสามารถเขียนในรูปของระยะห่างระหว่างนิ้วกับจุดเริ่มต้นของด้านที่เกี่ยวข้อง นั่นคือการใช้สามตัวแปรเพื่อระบุคอนฟิกรูชันของการจับแบบขนาน แต่การคำนวณเซตของการจับจากปริมาตรในสามมิติโดยตรงมีความซับซ้อน ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเพียงเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการจับแบบขนานด้วยการพิจารณาการวางตัวของด้านจับ เพื่อระบุว่า การจับแบบขนานบนสามด้านที่กำหนดให้มีความเป็นไปได้หรือไม่

การจับแบบขนานคือการจับด้วยสามนิ้วที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 5 ซึ่งทฤษฎีบทนี้แบ่งออกเป็น 2 เงื่อนไขคือ เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับการขนานกันของแนวแรง และเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับตำแหน่งสัมผัส โดยเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับการขนานกันของแนวแรงคือ มีเส้นในกรวยเสียดทานสองด้านที่จุดสัมผัสทั้งสามขนานกัน นั่นหมายความว่าเมื่อวาดกรวยเสียดทานสองด้านทั้งสามกรวยไว้ที่จุดเดียวกันแล้วต้องมีส่วนตัดกันดังกรวยที่แรงในรูปที่ 17(a) จึงจะสามารถหาเส้นในกรวยเสียดทานสองด้านทั้งสามที่ขนานกันได้ การตัดกันของกรวยเสียดทานทั้งสามขึ้นอยู่กับข้อกำหนดของมุมระหว่างเวกเตอร์ที่เป็นแกนกลางของกรวยเสียดทาน รูปที่ 17(b) แสดงการวาดกรวยเสียดทานสองด้านสองกรวยไว้ที่จุดยอดเดียวกัน จะเห็นได้ชัดว่ากรวยเสียดทานทั้งสองจะมีส่วนที่ตัดกันก็ต่อเมื่อเวกเตอร์กึ่งกลางของกรวยทั้งสองทำมุมกันไม่เกิน 2θ สำหรับการจับแบบขนานนั้นทำการพิจารณาเวกเตอร์สามเวกเตอร์ สองเวกเตอร์คือเวกเตอร์ตั้งฉากของด้านที่ทำมุมกันไม่เกิน 2θ และอีกหนึ่งเวกเตอร์คือเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากของอีกด้านที่เหลือ (ตำแหน่งนิ้วที่วางตัวอยู่บนด้านนี้จะถูกเรียกว่าจุดสัมผัสกลาง) หากทั้งสามเวกเตอร์นี้ทำมุมกันไม่เกิน 2θ กรวยเสียดทานสองด้านทั้งสามกรวยจะมีส่วนที่ตัดกันแน่นอน กรวยที่เกิดจากการตัดกันของกรวยเสียดทานสองด้านทั้งสามกรวยนี้มีความเกี่ยวข้องกับเงื่อนไขของจุดสัมผัสในการจับแบบขนาน เพื่อความสะดวกในการอ้างถึงจึงขอกำหนดให้กรวยนี้แทนด้วย C_{α}^P ครึ่งมุมของกรวย C_{α}^P แทนด้วยสัญลักษณ์ θ_{α}^P และแทนเวกเตอร์ที่เป็นกึ่งกลางของ C_{α}^P ด้วย \mathbf{m}_{α}^P ดังรูปที่ 17(c)



รูปที่ 17 การตัดกันของกรวยเสียดทานสองด้านสำหรับการจับแบบขนาน : กรวยเสียดทานสองด้าน 3 กรวยแทนด้วย กรวยที่มีเส้นขอบสีดำ สีเทา และเส้นประ

นอกจากข้อกำหนดของแนวแรงแล้ว ทฤษฎีบท 5 ยังกล่าวถึงเงื่อนไขของตำแหน่งบนด้านทั้งสามที่สามารถทำการจับแบบขนาน พิจารณารูปที่ 18 ที่จุด \mathbf{x}_0 แบ่งระนาบออกเป็นสองส่วนด้วยเส้นซึ่งทำมุม θ^P และ $\pi - \theta^P$ กับเวกเตอร์ \mathbf{m}^P เรียกระนาบฝั่งซ้ายที่ถูกแรงว่า ระนาบด้านซ้าย และอีกระนาบอยู่ฝั่งขวาของเส้นซึ่งทำมุม $-\theta^P$ และ $\pi + \theta^P$ กับเวกเตอร์ \mathbf{m}^P เรียกระนาบนี้ว่า ระนาบด้านขวา ซึ่งระนาบทั้งสองจะถูกนำไปใช้ในการพิจารณาเงื่อนไขต่าง ๆ ต่อไป

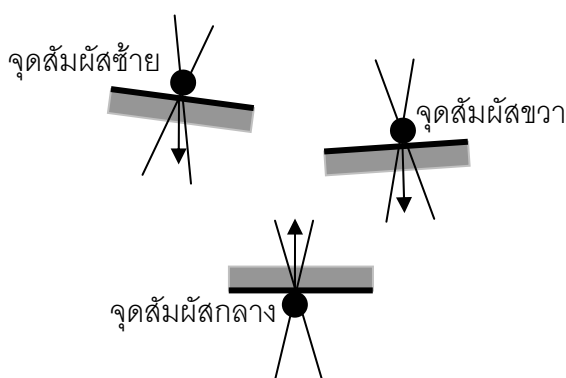


รูปที่ 18 ระนาบด้านซ้ายและด้านขวาที่จุด \mathbf{x}_0

ทฤษฎีบท 9 เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการจับด้วยนิ้วจำนวนสามนิ้วเพื่อให้อยู่ในสภาพสมดุลด้วยแรงที่ขนานกันโดยแรงที่จุดสัมผัสทั้งสามไม่เป็นศูนย์คือ มีส่วนที่ตัดกันของกรวยเสียดทานสองด้านที่จุดสัมผัสทั้งสาม และจุดสัมผัสอีกสองจุดอยู่ในระนาบที่ต่างกันของจุดสัมผัส

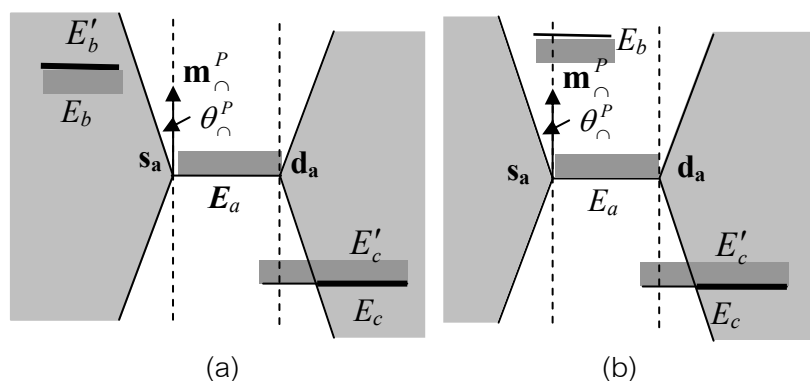
กลาง กำหนดให้จุดสัมผัสที่อยู่ในระนาบด้านซ้ายเรียกว่า จุดสัมผัสซ้าย และจุดสัมผัสที่อยู่ในระนาบด้านขวาเรียกว่า จุดสัมผัสขวา (รูปที่ 19)

จากทฤษฎีบทนี้แสดงถึงการแทนการจับแบบขนานด้วยตำแหน่งของนิ้วบนด้านทั้งสาม ซึ่งตำแหน่งของนิ้ว \mathbf{x}_i บนแต่ละด้านถูกกำหนดด้วยระยะทาง l_i จากจุดเริ่มต้นของด้าน ดังนี้ $\mathbf{x}_i = \mathbf{s}_i + l_i (\mathbf{d}_i - \mathbf{s}_i) / |\mathbf{d}_i - \mathbf{s}_i|$ และ $i = a, b, c$ โดย \mathbf{s}_i คือจุดเริ่มต้นของด้าน และ \mathbf{d}_i คือจุดปลายของด้าน ดังนั้นเซตของการจับแบบขนานที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 9 จึงเป็นปริมาตรในปริภูมิที่มี l_a, l_b, l_c เป็นองค์ประกอบ



รูปที่ 19 การกำหนดชื่อของจุดสัมผัสสำหรับการจับแบบขนาน

สิ่งที่เราต้องคำนวณหาคือเซตของการจับแบบขนานบนสามด้านที่กำหนดให้เพื่อทำการระบุจุดยอดในกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับบนสามด้านนี้ แต่การหาเซตของการจับที่ถูกแทนด้วยระยะทางจากจุดเริ่มต้นของสามด้านโดยตรงต้องอาศัยการคำนวณที่ซับซ้อน ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงขอเสนอเงื่อนไขเพียงพอสำหรับทดสอบสามด้านที่กำหนดให้ว่าสามารถทำการจับแบบขนานได้หรือไม่ กำหนดให้ E_a คือด้านที่จุดสัมผัสกลางวางตัวอยู่ โดยมีอีกสองด้านที่เหลือคือ E_b และ E_c พิจารณารูปที่ 20(a) จะเห็นได้ว่าหากมีส่วนของเส้นตรง $E'_b \subset E_b$ และ $E'_c \subset E_c$ อยู่ในระนาบด้านซ้ายของจุดเริ่มต้น \mathbf{s}_a และระนาบด้านขวาของจุดปลาย \mathbf{d}_a ตามลำดับ ซึ่งรับรองได้ว่าสามารถหาจุดสัมผัสบนด้านทั้งสามที่ทำการจับแบบขนานตามทฤษฎีบท 9 ได้เสมอ และเป็นสิ่งที่บ่งบอกว่าเซตของการจับแบบขนานของสามด้านนั้นไม่เป็นเซตว่าง แต่เงื่อนไขนี้ทำให้การจับแบบขนานด้วยสามด้านดังตัวอย่างในรูปที่ 20(b) ขาดหายไป อย่างไรก็ตามการจับบางส่วนที่หายไปนั้นคือการจับด้วยสองนิ้วนั่นเอง ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงขอแสดงความสนใจการจับแบบขนานที่นอกเหนือจากการจับในรูปที่ 20(a)



รูปที่ 20 การทดสอบเขตของการจับแบบขนาน

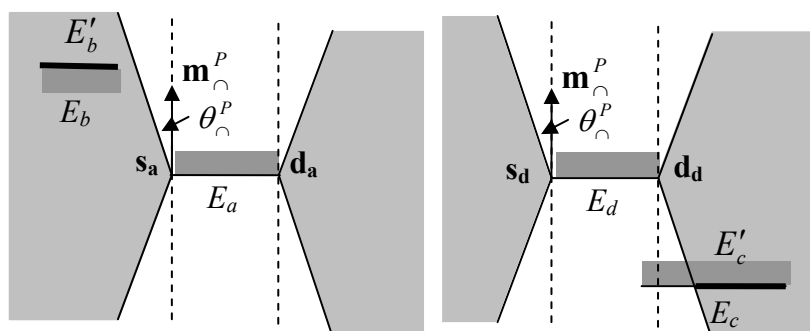
เมื่อเรารู้แล้วว่าเขตของการจับแบบขนานสำหรับสามด้านนั้นมีอยู่จริง สิ่งที่ต้องคำนึงถึงในการสลับนิ้วคือ ตำแหน่งของนิ้วบนด้านที่สามารถทำการสลับนิ้วได้ ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป แต่ในส่วนนี้จะขอกกล่าวถึงการหาตำแหน่งของนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน เนื่องจากในวิทยานิพนธ์นี้ไม่ได้ทำการหาเขตของการจับแบบขนานโดยตรง ดังนั้นการหาตำแหน่งของนิ้วบนทั้งสามด้านจึงขอใช้วิธีการสุ่มตำแหน่ง เมื่อได้ตำแหน่งที่ทำการสุ่มบนด้านทั้งสามแล้วนำไปทดสอบว่าสอดคล้องกับทฤษฎีบท 9 หรือไม่ หากไม่สอดคล้องจะต้องทำการสุ่มตำแหน่งใหม่ จนกว่าจะได้ตำแหน่งที่สามารถทำการจับแบบขนานได้

4.2.2 การสลับนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน

การสลับนิ้วระหว่างการจับสองแบบที่ต่างกันจะทำได้เมื่อเขตของตำแหน่งบนด้านร่วมของการจับทั้งสองมีส่วนที่ซ้อนทับกัน แต่วิทยานิพนธ์นี้ไม่ได้ทำการคำนวณหาเขตของการจับแบบขนานโดยตรง จึงขอเสนอวิธีการคำนวณหาการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบขนาน โดยการสลับนิ้วมีอยู่ 3 กรณีคือ การสลับจุดสัมผัสฝั่งกลาง การสลับจุดสัมผัสฝั่งที่ไม่ใช่จุดสัมผัสฝั่งกลาง และการสลับจุดสัมผัสฝั่งที่ไม่ใช่จุดสัมผัสฝั่งกลางแต่เปลี่ยนสถานะของจุดสัมผัสฝั่งกลาง และในส่วนท้ายของหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว

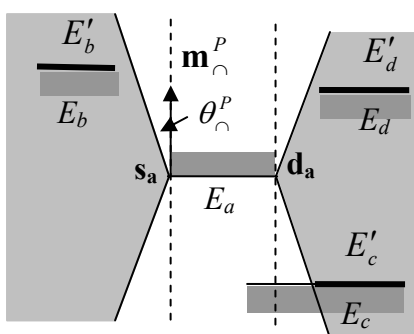
ก่อนอื่นจะขอกกล่าวถึงการสลับจุดสัมผัสฝั่งกลาง รูปที่ 21 แสดงการสลับนิ้วจากการจับบนด้าน E_a, E_b และ E_c ไปเป็นการจับบนด้าน E_b, E_c และ E_d หากมีส่วนของเส้นตรง $E'_b \subset E_b$ ที่อยู่ในระนาบด้านซ้ายของจุด s_a และ s_d รวมถึงการมีส่วนของเส้นตรง $E'_c \subset E_c$ ที่อยู่ในระนาบด้านขวาของ d_a และ d_d จะเห็นได้ว่าเป็นการสลับนิ้วได้แน่นอน โดยวางตำแหน่งสองนิ้วที่ไม่ถูกสลับในส่วนหนึ่งของเส้นตรง E'_b และ E'_c แล้ววางนิ้วที่ไม่ได้ทำการจับใน

ขณะนั้น ณ ตำแหน่งใด ๆ บนด้าน E_d หลังจากนั้นยกนิ้วที่อยู่บนด้าน E_a ออก ส่งผลให้เกิดการสลับนิ้วจากการจับบนด้าน E_a, E_b และ E_c ไปเป็นการจับบนด้าน E_b, E_c และ E_d โดยระหว่างกระบวนการสลับนิ้วการจับวัตถุยังคงคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์อยู่ตลอด



รูปที่ 21 การสลับจุดสัมผัสผัดกลาง

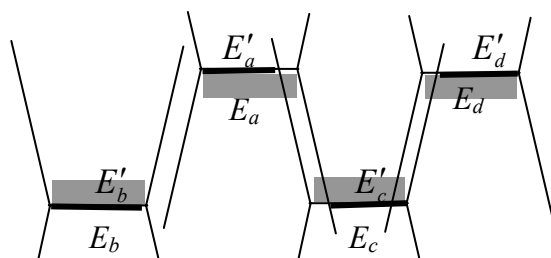
การสลับจุดสัมผัสผัดที่ไม่ใช่จุดสัมผัสผัดกลางใน รูปที่ 22 แสดงการสลับนิ้วจากด้าน E_c ไปยังด้าน E_d โดยมีด้าน E_a, E_b เป็นด้านที่ถูกจับร่วมกัน และจุดบนด้าน E_a เป็นจุดสัมผัสผัดกลาง หากมีส่วนของเส้นตรง E'_c และ E'_d อยู่ในระนาบด้านซ้ายของ s_a ทั้งคู่ หรืออยู่ในระนาบด้านขวาของ d_a ทั้งคู่ดังรูปที่ 22 จะสามารถทำการสลับนิ้วได้เสมอด้วยการวางนิ้วหนึ่งบน E'_c แล้ววางนิ้วที่ไม่ได้ทำการจับลงบน E'_d นิ้วที่อยู่บน E'_c จะถูกยกออกได้ ทำให้เกิดการสลับนิ้วระหว่างการจับแบบขนานบนด้าน E_a, E_b และ E_c ไปเป็นการจับบนด้าน E_b, E_c และ E_d



รูปที่ 22 การสลับจุดสัมผัสผัดที่ไม่ใช่จุดสัมผัสผัดกลาง

กรณีสุดท้ายคือการสลับจุดสัมผัสผัดที่ไม่ใช่จุดสัมผัสผัดกลางแต่เปลี่ยนสถานะของจุดสัมผัสผัดกลางดังแสดงการสลับนิ้วจากการจับบนด้าน E_a, E_b และ E_c ไปเป็นการจับบนด้าน E_a, E_c และ E_d ในรูปที่ 23 จุดสัมผัสผัดกลางบนด้าน E_d สำหรับการจับเริ่มต้นถูกเปลี่ยนเป็นจุดสัมผัสผัดซ้ายสำหรับการจับปลายทาง การสลับนิ้วในลักษณะนี้สามารถเกิดขึ้นได้เสมอ เนื่องจาก

เงื่อนไขเพียงพอในการพิจารณาเซตของการจับแบบขนานบนสามด้านทำให้สามารถมั่นใจได้ว่าการจับบนด้าน E_a, E_b และ E_c จะมีส่วนของเส้นตรง E'_b และ E'_c เสมอ ในขณะที่การจับปลายทางบนด้าน E_a, E_c และ E_d จะมีส่วนของเส้นตรง E'_a และ E'_d เสมอ หากต้องการทำการเปลี่ยนการจับด้วยการสลับนิ้วจากด้าน E_a, E_b และ E_c ไปเป็นการจับบนด้าน E_a, E_c และ E_d สามารถทำได้โดยการจัดวางนิ้วทั้งสามให้อยู่ใน E'_a, E'_b และ E'_c ซึ่งรับรองได้ว่าสามารถหาตำแหน่งของนิ้วบนด้าน E_d เพื่อทำการจับแบบขนานร่วมกับด้าน E_a และ E_c ได้เสมอด้วยการวางนิ้วที่ไม่เกี่ยวข้องกับการจับเริ่มต้นบนส่วนของเส้นตรง E'_d ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่าการสลับนิ้วด้วยการสลับจุดสัมผัสที่ไม่ใช่จุดสัมผัสกลางแต่เปลี่ยนสถานะของจุดสัมผัสกลางสามารถทำได้เสมอ

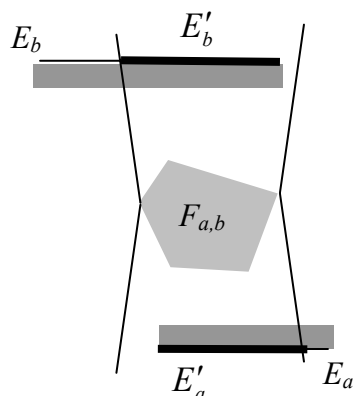


รูปที่ 23 การสลับจุดสัมผัสที่ไม่ใช่จุดสัมผัสกลางแต่เปลี่ยนสถานะของจุดสัมผัสกลาง

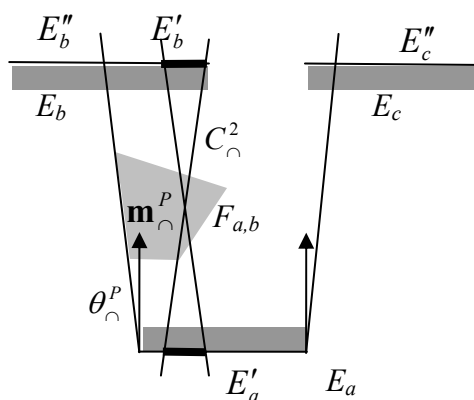
สำหรับการสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบขนานต่างจากการสลับนิ้วระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ เนื่องจากการจับด้วยสองนิ้วถูกแทนด้วยจุดบนระนาบ ในขณะที่การจับแบบขนานถูกแทนด้วยตำแหน่งบนด้านทั้งสาม เพื่อที่จะสามารถคำนวณหาการสลับนิ้วระหว่างการจับสองแบบนี้ จึงต้องทำการเปลี่ยนเซตของการแทนการจับด้วยสองนิ้วจากจุดบนระนาบเป็นเซตของการแทนการจับด้วยตำแหน่งบนด้านที่ทำการจับ เมื่อพิจารณาการวาดกรวย C_n^2 ที่ทุกจุดในโพกัสเซลล์เพื่อไปติดกับด้านที่ถูกจับจะได้บริเวณสัมผัสอิสระเสมอ ด้วยเหตุนี้เราจึงหาเซตของจุดบนทั้งสองด้านที่สามารถทำการจับด้วยสองนิ้วได้ โดยการวาดกรวย C_n^2 ที่ทุกจุดในโพกัสเซลล์เพื่อให้ไปติดกับสองด้านที่ถูกจับส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันนี้คือเซตของทุกจุดบนด้านที่ทำการจับด้วยสองนิ้วได้ดังรูปที่ 24

การทดสอบว่าการจับด้วยสองนิ้วสามารถทำการสลับนิ้วไปเป็นการจับแบบขนานได้หรือไม่นั้น ทำโดยการพิจารณาตามจำนวนด้านที่ร่วมกันระหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบขนาน กรณีแรกคือกรณีที่การจับทั้งสองมีด้านร่วมกันหนึ่งด้าน เช่น หากเราต้องการเปลี่ยนการจับบนด้าน E_a และ E_b ไปเป็นการจับบนด้าน E_b, E_c และ E_d สิ่งที่ต้องทำก็คือ หาเซตของการจับด้วยสองนิ้วบนด้าน E_b ซึ่งเป็นด้านร่วมกันของทั้งสองการจับ เซตนี้คือส่วนของเส้นตรง E'_b

ในรูปที่ 24 นั้นเอง แล้วนำ E'_b , E_c และ E_d ไปทดสอบว่าสามารถทำการจับแบบขนานได้หรือไม่ (หัวข้อที่ 4.2.1) หากทำการจับแบบขนานได้นั้นหมายความว่า การสลับนี้อะหว่างสองการจับนี้ สามารถทำได้ และยังแสดงถึงการมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดในกราฟที่แทนการจับทั้งสองแบบนี้ด้วย อีกกรณีหนึ่งที่เกิดขึ้นได้คือ กรณีที่ทั้งสองการจับมีด้านร่วมกันสองด้าน ดังรูปที่ 25 แสดงการสลัมนี้อะหว่างการจับบนด้าน E_a และ E_b ไปเป็นการจับบนด้าน E_a , E_b และ E_c ซึ่งชัดเจนว่าการสลัมนี้อะหว่างการจับทั้งสองนี้สามารถทำได้เสมอเนื่องจากทุกตำแหน่งบน E_d สามารถทำการจับแบบขนานร่วมกับตำแหน่งใด ๆ บน E''_b , E''_c ซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรงที่อยู่ในระนาบด้านซ้ายและด้านขวาของด้าน E_d ตามลำดับ และในขณะเดียวกันยังสามารถทำการจับด้วยสองนิ้วบนส่วนของเส้นตรง E'_a และ E'_b ที่เกิดจากการวาดกรวย C^2_{\cap} ณ จุดใด ๆ ในไฟกัสเซลล์ไปตัดกับด้าน E_a และ E_b ได้ด้วย

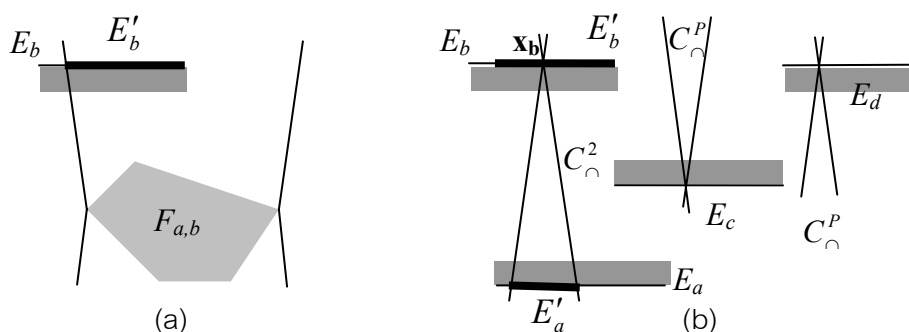


รูปที่ 24 การเปลี่ยนการแทนการจับด้วยสองนิ้วจากจุดบนระนาบเป็นการแทนการจับด้วยตำแหน่งบนด้าน



รูปที่ 25 การสลัมนี้อะหว่างการจับด้วยสองนิ้วและการจับแบบขนานเมื่อทั้งสองการจับมีด้านร่วมกันสองด้าน

การสลับนีวไม่อาจเกิดขึ้นได้หากตำแหน่งที่ทำการจับวัตถุนั้นไม่เหมาะสม ในส่วนนี้จึงขอกล่าวถึงการหาตำแหน่งของนีวเพื่อทำการสลับนีวระหว่างการจับด้วยสองนีว และการจับแบบขนาน เมื่อพิจารณาถึงการระบุคอนฟิกูเรชันของการจับทั้งสองแบบนี้ จะเห็นว่าการจับด้วยสองนีวถูกระบุด้วยจุดบนระนาบ ในขณะที่การจับแบบขนานถูกระบุด้วยตำแหน่งบนด้าน ดังนั้น การที่จะหาตำแหน่งของการจับที่อยู่ในอินเตอร์เซกชันของเซตการจับทั้งสองจึงต้องคำนึงถึงการระบุการจับเพียงวิธีใดวิธีหนึ่ง โดยจะขอใช้วิธีการแปลงพิกัดเซลล์ของการจับด้วยสองนีวให้อยู่ในรูปเซตของตำแหน่งบนด้านที่ถูกระบุเพื่อให้การพิจารณาเซตของการจับเป็นแบบเดียวกัน ในการอธิบายการหาตำแหน่งเพื่อทำการสลับนีวขอให้อธิบายการสลับนีวจากการจับด้วยสองนีวบนด้าน E_a และ E_b ไปเป็นการจับแบบขนานบนด้าน E_b , E_c และ E_d สามารถทำได้ด้วยการวาดกรวย C_{\cap}^2 บนทุกจุดใน $F_{a,b}$ ไปตัดกับด้าน E_b แล้วได้ส่วนของเส้นตรง E'_b ดังรูปที่ 26(a) ซึ่งส่วนของเส้นตรงนี้คือเซตของตำแหน่งบนด้าน E_b ที่สามารถหาการจับด้วยสองนีวร่วมกับด้าน E_a ได้เสมอ หลังจากนั้นทำการสุ่มหาตำแหน่งของการจับแบบขนานบนด้าน E_c , E_d และส่วนของเส้นตรง E'_c เมื่อได้ตำแหน่งของการจับแบบขนานแล้ว สิ่งที่ต้องหาคือตำแหน่งของการจับด้วยสองนีว กำหนดให้ \mathbf{x}_b คือตำแหน่งบนส่วนของเส้นตรง E'_b ที่ได้จากการสุ่ม เราสามารถหาตำแหน่งบนด้าน E_a ที่ทำการจับด้วยสองนีวร่วมกับตำแหน่ง \mathbf{x}_b ได้ด้วยการวาดกรวย C_{\cap}^2 ไปตัดกับด้าน E_a ส่งผลให้ได้ส่วนของเส้นตรง E'_a ที่ทุกตำแหน่งบนส่วนของเส้นตรงนี้สามารถทำการจับด้วยสองนีวร่วมกับตำแหน่ง \mathbf{x}_b ได้เสมอดังรูปที่ 26(b) ซึ่งตำแหน่งทั้งสี่สามารถใช้ในการสลับนีวเพื่อเปลี่ยนการจับได้



รูปที่ 26 การคำนวณตำแหน่งในการสลับนีวระหว่างการจับด้วยสองนีว และการจับแบบขนาน

การสลับนีวสำหรับการจับแบบขนานที่กล่าวมาทั้งหมดมีความสัมพันธ์กับกราฟการสลับนีวโดยแบ่งเป็นสองกรณีคือ การสลับนีวระหว่างการจับแบบขนานด้วยกันเอง หากสามารถทำการสลับนีวระหว่างสองการจับที่มีนีวต่างกันหนึ่งนีว นั้นหมายถึงการมีเส้นเชื่อม

ระหว่างจุดยอดในกราฟสองจุดที่แทนการจับแบบขนานทั้งสอง อีกกรณีหนึ่งคือ การสลับนิ้ว ระหว่างการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว หากสามารถทำการสลับนิ้วได้ เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดของการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้วนี้ย่อมมีอยู่เช่นกัน แต่บางครั้งการสลับนิ้วอาจไม่สามารถทำได้ทันที ยังต้องอาศัยการจัดวางนิ้วอันจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

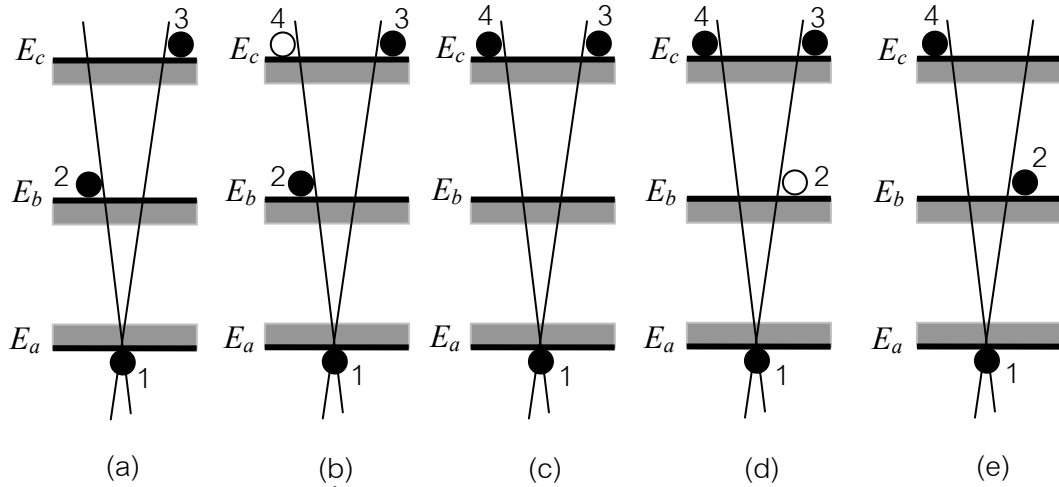
4.2.3 การจัดวางนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน

การจัดวางนิ้วสำหรับการจับแบบขนานมีความยืดหยุ่นสูง เนื่องจากการจับแบบขนานตามทฤษฎีบท 9 อนุญาตให้จุดสัมผัสซ้ายอยู่ที่ตำแหน่งใด ๆ ในระนาบด้านซ้ายของจุดสัมผัสกลาง และจุดสัมผัสขวาอยู่ที่ตำแหน่งใด ๆ ในระนาบด้านขวาของจุดสัมผัสกลาง

การจัดวางนิ้วนั้นอาจต้องมีการสลับสถานะของนิ้วดังรูปที่ 27 นิ้วที่เคยเป็นจุดสัมผัสซ้ายสามารถเปลี่ยนสถานะเป็นจุดสัมผัสขวา และเช่นเดียวกันนิ้วที่เคยเป็นจุดสัมผัสขวาสามารถเปลี่ยนสถานะเป็นจุดสัมผัสซ้าย ในขณะที่จุดสัมผัสกลางอยู่ที่ตำแหน่งเดิม ปัญหาที่เกิดขึ้นคือ หากเราทำการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้วด้วยการเลื่อนนิ้ว หรือหมุนนิ้วเพียงอย่างเดียวจะทำให้จุดสัมผัสซ้ายและจุดสัมผัสขวาต้องผ่านกรวย C^p ซึ่งไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบท 9 แต่ปัญหานี้สามารถแก้ได้ด้วยการสลับนิ้วดังรูปที่ 27 การจับแบบขนานในรูปที่ 27(a) สามารถเปลี่ยนเป็นการจับในรูปที่ 27(e) ได้ด้วยการวางนิ้ว 4 บนด้าน E_c ดังรูปที่ 27(b) โดยยังคงการจับด้วยนิ้ว 1, 2 และ 3 อยู่ หลังจากนั้นนำนิ้ว 2 ออกเพื่อเปลี่ยนเป็นการจับแบบขนานด้วยนิ้ว 1, 3 และ 4 ดังรูปที่ 27(c) แล้วนำนิ้ว 2 มาวางที่อีกด้านของกรวยดังรูปที่ 27(d) ในขณะที่ทำการจับด้วยนิ้ว 1, 3 และ 4 และขั้นตอนสุดท้ายทำการยกนิ้ว 3 ออกเพื่อทำการจับแบบขนานด้วยนิ้ว 1, 2 และ 4 เห็นได้ว่าลำดับการสลับนิ้วดังกล่าวนี้ยังคงสภาพการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์ด้วยการจับแบบขนานตลอด ดังนั้นจึงสามารถทำการจัดวางนิ้วเพื่อเปลี่ยนการจับแบบขนานบนสามด้านเดียวกันได้เสมอ

4.2.4 การคำนวณหากราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน

ในส่วนนี้จะขอเสนออัลกอริทึมในการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของสามด้านที่จะนำไปพิจารณาค่าความเป็นไปได้ในการจับแบบขนาน โดยอาศัยข้อกำหนดของมุมระหว่างเวกเตอร์ตั้งฉากทั้งสามที่ได้เคยกล่าวไว้ในหัวข้อที่ 4.2.1



รูปที่ 27 การสลับนิ้วเพื่อสลับสถานะของจุดสัมผัสซ้ายและจุดสัมผัสขวา

เริ่มด้วยการรับข้อมูลแถวลำดับ $allEdge[1..n]$ ซึ่งเก็บ $EdgeStruct$ ของทุกด้าน แล้วทำการจัดเรียง $allEdge$ ในลำดับที่เพิ่มขึ้นของค่า $normalAngle$ หลังจากนั้นทำการเลือก เวกเตอร์ตั้งฉากสามเวกเตอร์จาก $allEdge$ ดังรหัสเทียม

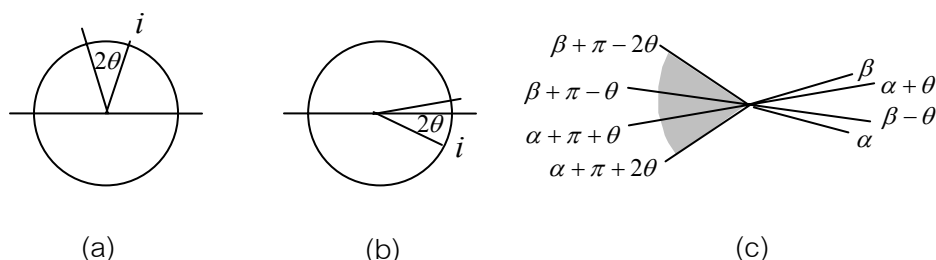
```

1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:    $\alpha = allEdge[i].normalAngle$ 
3:    $j = (i + 1) \bmod n$ 
4:   while  $allEdge[j].normalAngle < \alpha + 2\theta$  do
5:      $\beta = allEdge[j].normalAngle$ 
6:     for each  $k$  such that
7:        $allEdge[k].normalAngle > \beta + \pi - 2\theta$  and
8:        $allEdge[k].normalAngle < \alpha + \pi + 2\theta$  do
9:         generate candidate triple of edges:
10:         $\{ allEdge[i].id, allEdge[j].id, allEdge[k].id \}$ 
11:       $j = (j + 1) \bmod n$ 

```

ขั้นแรกทำการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากแรกจาก $allEdge$ ส่งผลให้การเลือกเวกเตอร์ที่สองถูกจำกัดให้ทำมุมกับเวกเตอร์แรกน้อยกว่า 2θ ด้วยค่า $normalAngle$ ที่มากกว่าเวกเตอร์แรกดังรูปที่ 28(a) จะเห็นว่าเมื่อเวกเตอร์แรกที่ถูกเลือกมีค่า $normalAngle$ ตั้งแต่ $2\pi - 2\theta$ เป็นต้นไป ขอบเขตของการเลือกเวกเตอร์ที่สองจะมีส่วนที่ล้ากลับเข้าไปใน $allEdge$ ซึ่งมีค่า $normalAngle$ น้อยกว่าเวกเตอร์แรกดังรูปที่ 28(b) ดังนั้นดัชนี j ของการเลือกเวกเตอร์ที่สองจึงมีโอกาสที่จะเกิน n แล้ววนกลับไปเริ่มที่ 1 (บรรทัดที่ 3 และ 8) หลังจากทำการเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากสองเวกเตอร์แล้ว เวกเตอร์ที่สามจะถูกกำหนดให้อยู่ในขอบเขต $(\beta + \pi - 2\theta, \alpha + \pi + 2\theta)$ ดังส่วนที่ถูกระงับในรูปที่ 28(c) จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขของมุมระหว่างสามเวกเตอร์ตั้งฉากที่มี

โอกาสทำการจับแบบขนานได้ เมื่อเราเลือกครบทั้งสามด้านแล้วนำไปพิจารณาการมีอยู่ของเซต การจับแบบขนานบนสามด้านนั้นด้วยวิธีที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 4.2.1 หากเซตของการจับแบบขนาน มีอยู่จริง แสดงว่าจุดยอดในกราฟการสลับนีวที่แทนการจับบนสามด้านนี้ย่อมมีอยู่ด้วย ขั้นตอนสุดท้ายคือการหาเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุดยอดที่แทนการจับแบบขนานสองแบบ หรือจุดยอดหนึ่งจุดยอดแทนการจับแบบขนานและอีกจุดยอดแทนการจับด้วยสองนี้ว สำหรับการพิจารณาเส้นเชื่อมระหว่างการจับแบบขนานจะทำได้เมื่อการจับทั้งสองแบบนี้มีด้านต่างกันหนึ่ง ด้าน ในขณะที่การพิจารณาเส้นเชื่อมระหว่างการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนี้วจะทำได้เมื่อการจับทั้งสองแบบมีด้านร่วมกันอย่างน้อยหนึ่งด้าน ถ้าเราสามารถทำการสลับนีวระหว่างสองการจับนี้ได้ (หัวข้อที่ 4.2.2) นั้นหมายความว่าเส้นเชื่อมระหว่างสองจุดยอดนี้มีอยู่เช่นกัน



รูปที่ 28 การเลือกเวกเตอร์ตั้งฉากของสองด้านสำหรับการจับด้วยสองนี้ว

กราฟการสลับนีวที่สมบูรณ์ทำให้เราสามารถหาลำดับของการเปลี่ยนตำแหน่งของนีวจากการจับหนึ่งเป็นการจับอื่นได้ด้วยการค้นในกราฟ ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีการค้นตามแนวกว้างเพื่อให้ได้เส้นทางที่สั้นที่สุด โดยสิ่งที่ต้องกระทำก่อนทำการค้นในกราฟคือการระบุจุดยอดที่แทนการจับเริ่มต้น และจุดยอดที่แทนการจับเป้าหมาย หลังจากนั้นจึงทำการค้นหาเส้นทางระหว่างสองจุดยอดนี้ เส้นทางที่ได้แสดงถึงความสามารถในการสลับนีวระหว่างสองการจับ ซึ่งถูกแทนด้วยจุดยอดสองจุดที่มีเส้นเชื่อมระหว่างกัน แต่บางครั้งการสลับนีวระหว่างสองการจับอาจไม่สามารถทำได้โดยตรง จึงต้องอาศัยกระบวนการจัดวางนีวเพื่อให้นีวอยู่ในตำแหน่งที่เหมาะสมในการทำการสลับนีว ด้วยกระบวนการเหล่านี้ทำให้เราสามารถทำการหาลำดับของการเปลี่ยนตำแหน่งของนีวเพื่อเปลี่ยนการจับเริ่มต้นเป็นการจับบนด้านที่ต้องการได้ด้วยการค้นในกราฟ

บทที่ 5

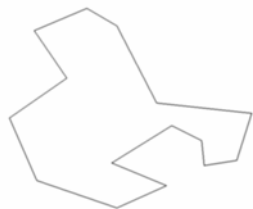
การทดลองและผลการทดลอง

บทนี้กล่าวถึงการทดลองวิธีการคำนวณหากราฟการสลับนิว ตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองคือวัตถุหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านต่าง ๆ กัน โดยทำการพิจารณาผลการทดลองในแง่จำนวนองค์ประกอบที่ต่อเนื่องกันของกราฟการสลับนิวสำหรับแต่ละประเภทการจับ จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์และสรุปผลการทดลองทั้งหมด

5.1 วิธีการทดลอง

วิทยานิพนธ์นี้ทำการทดลองการคำนวณหากราฟการสลับนิวด้วยการเขียนโปรแกรมเพื่อจำลองการทดลอง โปรแกรมที่ใช้ในการทดลองเขียนด้วยภาษาซีบวกบวก โดยใช้ไลบรารีลิสต้า [21] ในการคำนวณทางเรขาคณิต การทำงานของโปรแกรมทั้งหมดถูกวัดเวลาด้วยการใช้คอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่มีความเร็วของหน่วยประมวลผลที่ 1.8 พันล้านเฮิร์ตซ์

วัตถุหลายเหลี่ยมที่นำมาใช้ในการทดลองมีจำนวนด้าน 15, 20, 25, 30, 35 และ 40 ดังรูปที่ 29 โดยกำหนดให้ครึ่งมุมของกรวยเสียดทานมีขนาด 10 องศา



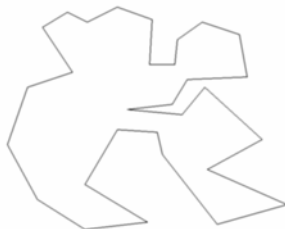
(a)



(b)



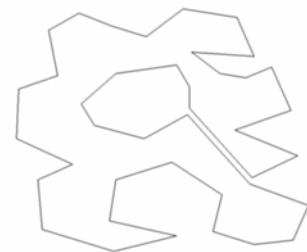
(c)



(d)



(e)



(f)

รูปที่ 29 วัตถุหลายเหลี่ยมที่ใช้ในการทดลอง

การทดลองจะแบ่งออกเป็นห้าส่วนคือ การคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์หรือการจับแบบขนานเพียงแบบใดแบบหนึ่ง การคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์หรือการจับแบบขนานร่วมกับการจับด้วยสองนิ้ว และการคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับทั้งสามแบบ เกณฑ์ที่ใช้ในการทดลองคือจำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อม และจำนวนองค์ประกอบที่ต่อเนื่องกันของกราฟการสลับนิ้ว เพื่อเป็นตัวบ่งชี้ถึงประสิทธิภาพในการเปลี่ยนแปลงการจับบนด้านที่ต่างกัน

5.2 ผลการทดลอง

ผลของการคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ แสดงในตารางที่ 1 สำหรับการจับแบบขนานเพียงแบบเดียวแสดงในตารางที่ 2 กรณีที่น่าสนใจคือการนำการจับด้วยสองนิ้วมาพิจารณาว่าการจับด้วยสามนิ้ว สาเหตุที่ไม่แสดงผลการคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้วเพราะการจับด้วยสองนิ้วทุกแบบสามารถทำการสลับนิ้วระหว่างกันได้เสมอจำนวนองค์ประกอบที่ต่อเนื่องกันในกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับด้วยสองนิ้วเพียงอย่างเดียวจึงเป็นองค์ประกอบเดียว แต่การจับด้วยสองนิ้วถูกนำมาพิจารณาเพื่อสร้างความต่อเนื่องระหว่างการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ด้วยกันเองดังตารางที่ 3 การจับแบบขนานด้วยกันเองดังตารางที่ 4 รวมถึงการจับแบบคอนเคอร์เรนท์และการจับแบบขนานดังแสดงในตารางที่ 5

ตารางที่ 1 ผลการทดลองสำหรับการจับคอนเคอร์เรนท์

จำนวนด้าน	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม	จำนวนองค์ประกอบ	เวลา(วินาที)
15	43	96	1	0.7
20	77	156	6	1.36
25	185	691	2	3.73
30	407	2099	1	10.75
35	550	3033	2	15.95
40	736	4580	1	28.53

ตารางที่ 2 ผลการทดลองสำหรับการจับแบบขนาน

จำนวนด้าน	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม	จำนวนองค์ประกอบ	เวลา(วินาที)
15	3	1	2	0.01
20	12	7	5	0.01
25	37	57	5	0.02
30	27	39	3	0.02
35	64	109	5	0.03
40	106	215	8	0.09

ตารางที่ 3 ผลการทดลองสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์และการจับด้วยสองนิ้ว

จำนวนด้าน	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม	จำนวนองค์ประกอบ	เวลา(วินาที)
15	53	243	1	0.95
20	89	351	3	1.75
25	206	1415	2	5.17
30	429	3162	1	13.56
35	576	4315	2	18.53
40	773	7056	1	29.28

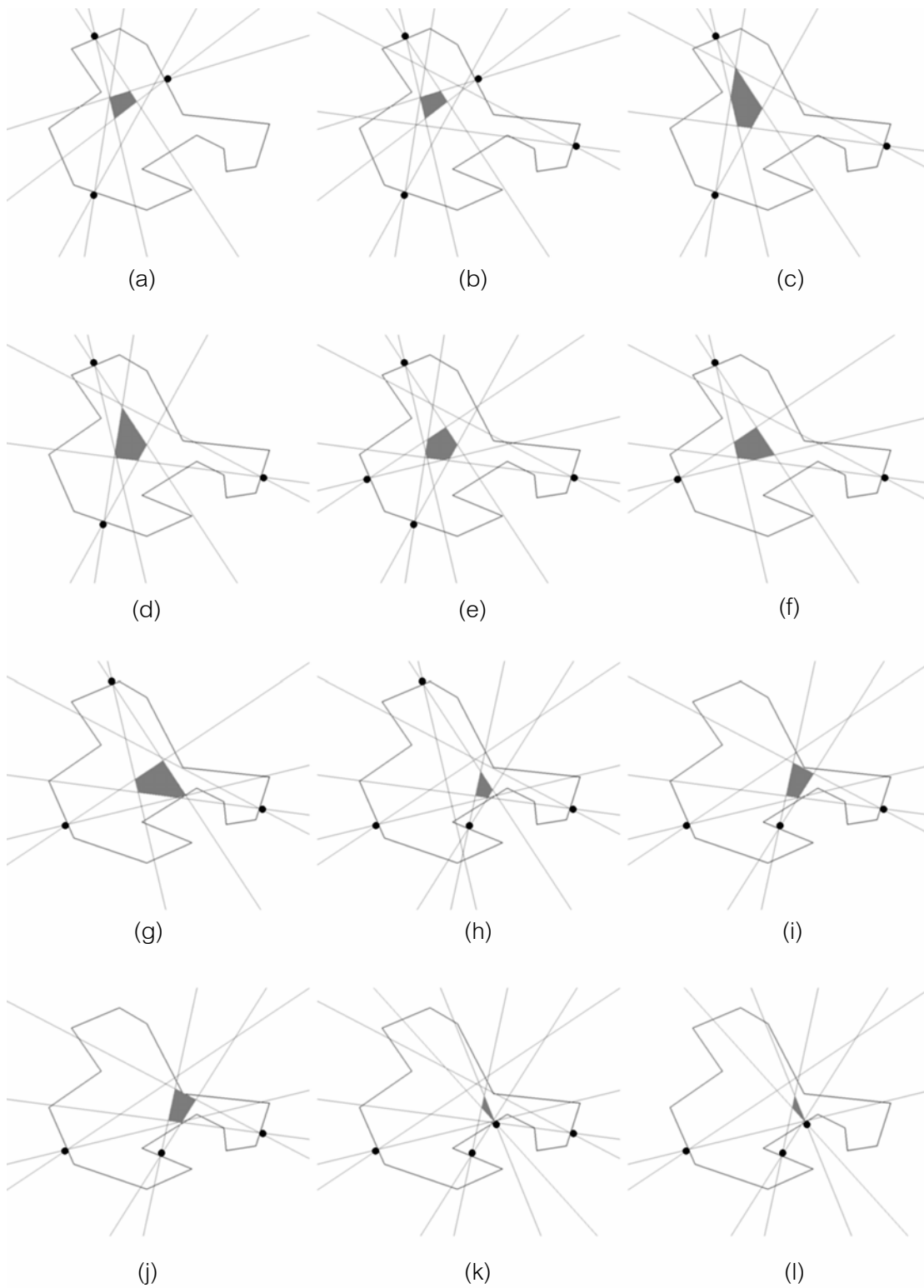
ตารางที่ 4 ผลการทดลองสำหรับการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว

จำนวนด้าน	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม	จำนวนองค์ประกอบ	เวลา(วินาที)
15	13	55	1	0.13
20	24	101	1	0.2
25	58	436	1	0.69
30	49	390	1	0.61
35	90	714	1	1.17
40	143	1439	1	2.16

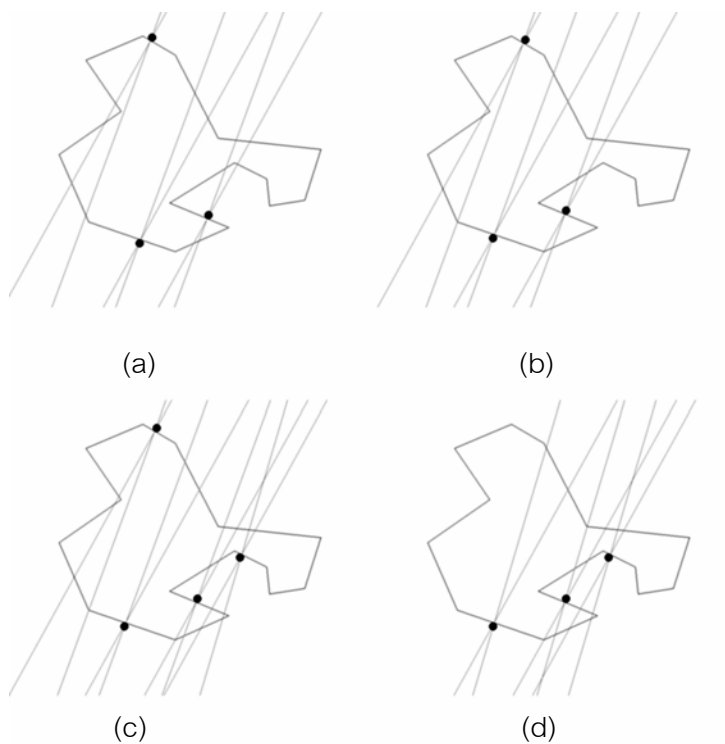
ตารางที่ 5 ผลการทดลองสำหรับการจับทุกแบบ

จำนวนด้าน	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นเชื่อม	จำนวนองค์ประกอบ	เวลา(วินาที)
15	56	253	1	0.97
20	101	386	3	1.94
25	243	1641	2	5.48
30	456	3321	1	13.20
35	640	4704	2	20.01
40	879	7829	1	30.33

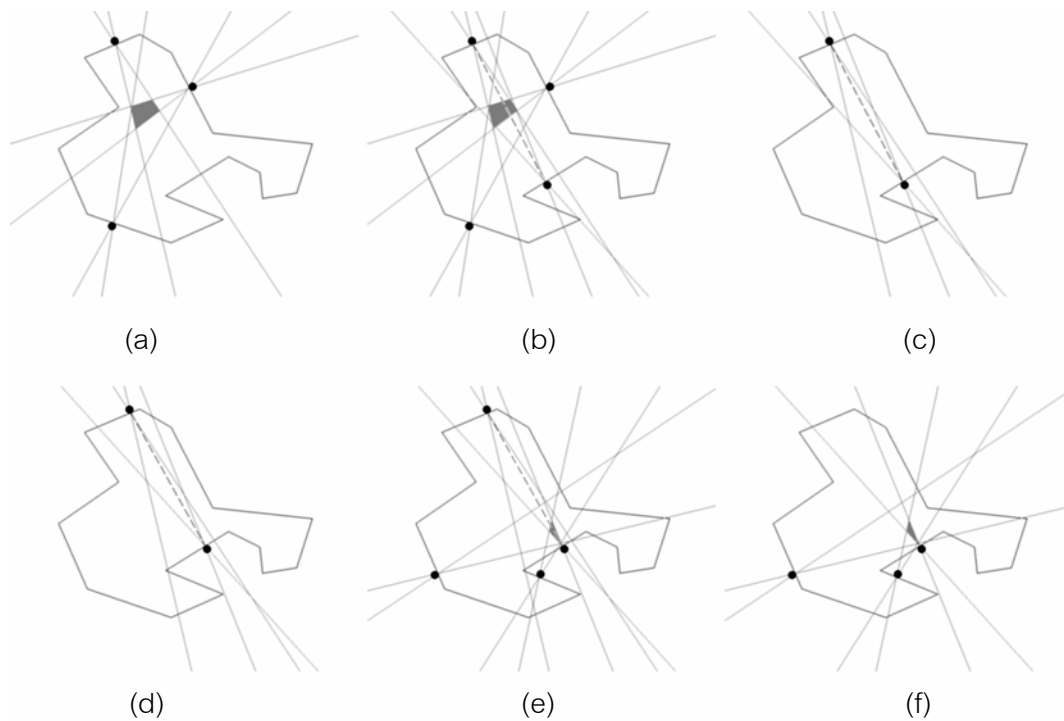
นอกจากผลการคำนวณกราฟการสลับนิวแล้ว ยังจะขอเสนอตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งของนิวที่ได้จากการจำลองการทดลอง เริ่มจากการเปลี่ยนตำแหน่งของนิวเมื่อพิจารณาการจับแบบคอนเคอร์เรนท์เพียงแบบเดียวดังรูปที่ 30 แสดงการเปลี่ยนจากการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ในรูปที่ 30(a) เพื่อให้เป็นการจับในรูปที่ 30(l) โดยส่วนที่แรเงาแสดงถึงการตัดกันของกรวยเสียตทาน การจับด้วยสามนิวอีกกรณีหนึ่งคือการจับแบบขนาน โดยตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งของนิวสำหรับการจับแบบขนานแสดงดังรูปที่ 31 นอกจากการจับด้วยสามนิว การจับด้วยสองนิวถือว่ามีความสำคัญเพราะ เมื่อนำการจับด้วยสองนิวมาพิจารณาร่วมกับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ดังรูปที่ 32 แสดงการเปลี่ยนจากการจับเริ่มต้นเป็นการจับจุดหมายที่เหมือนกันกับรูปที่ 30 จะพบว่ากรวยจับด้วยสองนิวช่วยลดจำนวนครั้งในการสลับนิวเพื่อเปลี่ยนการจับได้ จากจำนวนครั้งในการสลับนิว 4 ครั้งสำหรับการเปลี่ยนการจับในรูปที่ 30 เหลือแค่เพียง 2 ครั้งสำหรับการจับในรูปที่ 32 ในบางครั้งการจับด้วยสองนิวยังจะทำการเชื่อมโยงการจับสองแบบที่ไม่สามารถทำการสลับนิวระหว่างกันได้ ดังแสดงการจับแบบขนานในรูปที่ 33(a) ซึ่งไม่มีเส้นทางในกราฟที่เชื่อมต่อไปยังการจับแบบขนานในรูปที่ 33(i) แต่การจับทั้งสองแบบนี้สามารถเชื่อมโยงกันด้วยการสลับนิวที่นำการจับด้วยสองนิวมาพิจารณาร่วมกับการจับแบบขนานดังแสดงในรูปที่ 33 นอกจากนั้นการจับด้วยสองนิวยังมีบทบาทสำคัญในฐานะที่เป็นสะพานเชื่อมโยงการจับแบบคอนเคอร์เรนท์และการจับแบบขนานดังแสดงในรูปที่ 34 ซึ่งการจับทั้งสองแบบนี้ไม่มีโอกาสทำการสลับนิวระหว่างกันได้หากไม่นำการจับด้วยสองนิวมาพิจารณา โดยเส้นประแสดงถึงเส้นเชื่อมระหว่างจุดสัมผัสสองจุดสำหรับการจับด้วยสองนิว และการคำนวณหาเส้นทางในกราฟระหว่างการจับเริ่มต้นและการจับจุดหมายใช้เวลาไม่เกิน 0.1 วินาที



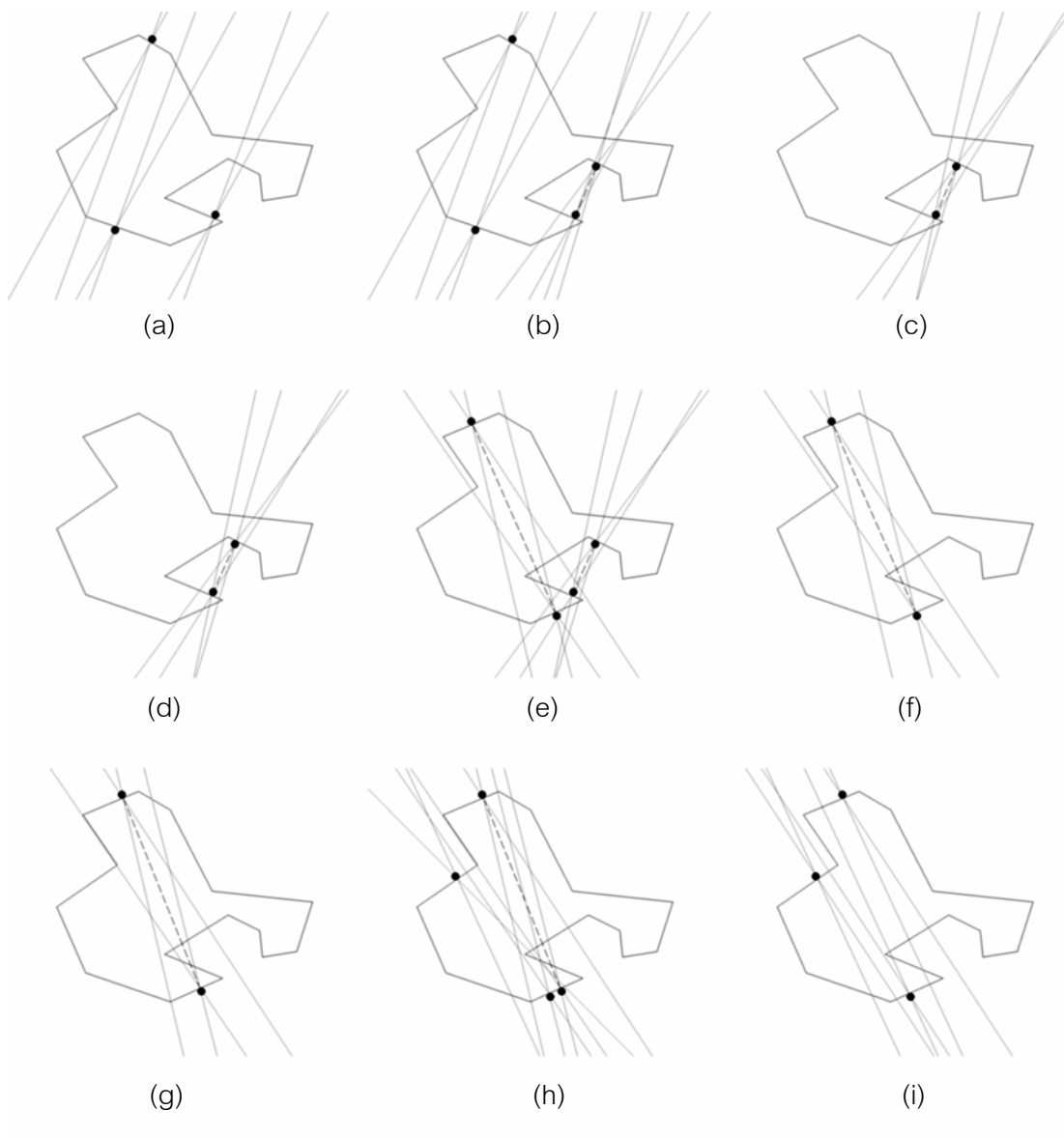
รูปที่ 30 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์



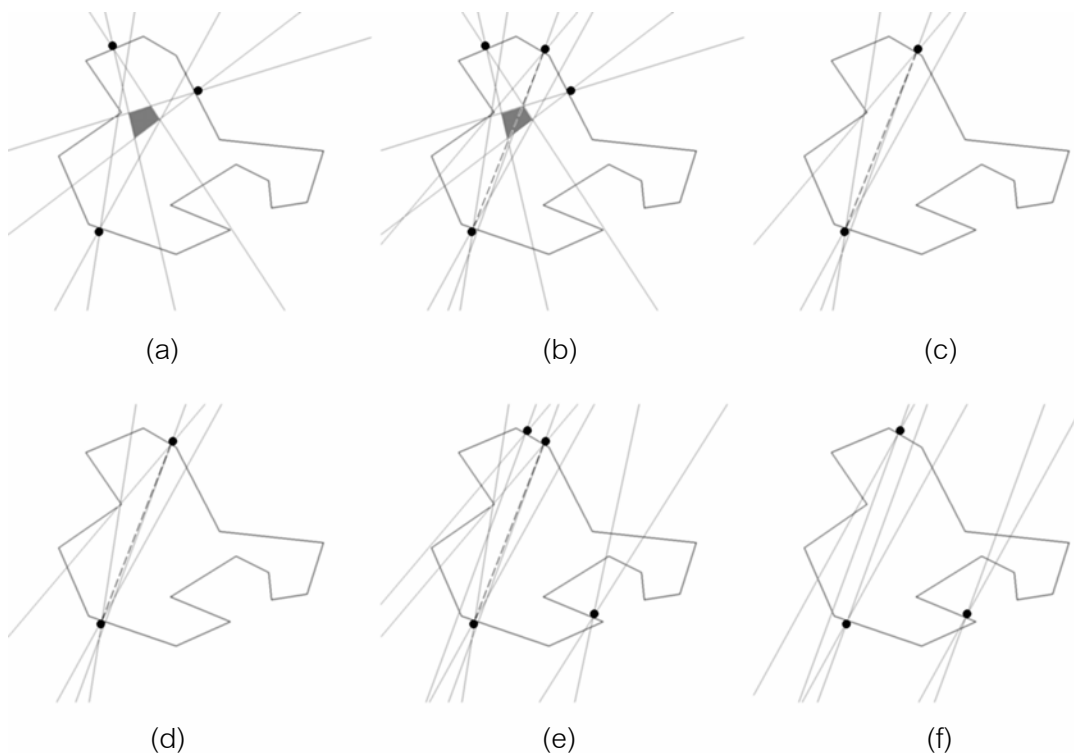
รูปที่ 31 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบขนาน



รูปที่ 32 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบคอนเคอร์เรนซ์และการจับด้วยสองนิ้ว



รูปที่ 33 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับแบบขนานและการจับด้วยสองนิ้ว



รูปที่ 34 ตัวอย่างการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วเมื่อพิจารณาการจับทุกแบบ

5.3 วิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง

จากผลการทดลองพบว่ากราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ค่อนข้างมีความสมบูรณ์ในตัวเองคือ มีจำนวนองค์ประกอบที่ต่อเนื่องกันในกราฟเพียง 1 หรือ 2 องค์ประกอบเท่านั้น แสดงถึงการวางตัวของโฟกัสเซลล์ที่เชื่อมต่อกัน นั่นคือโฟกัสเซลล์ของการจับที่มีด้านต่างกันหนึ่งด้านมีส่วนที่ซ้อนทับกัน และต่อเนื่องเป็นบริเวณที่เชื่อมติดกันเป็น 1 หรือ 2 องค์ประกอบตามจำนวนองค์ประกอบของกราฟการสลับนิ้ว ยกเว้นวัตถุตัวอย่างที่มีจำนวนด้าน 20 ด้านมีจำนวนองค์ประกอบที่ต่อเนื่องกันถึง 6 ส่วน ทั้งนี้คาดว่าน่าจะเป็นผลจากรูปทรงของวัตถุหลายเหลี่ยมในรูปที่ 29(b) ที่มีจำนวนด้านน้อย และความยาวของแต่ละด้านค่อนข้างสั้น จึงทำให้โฟกัสเซลล์ของการจับมีขนาดเล็กตามไปด้วย และมีผลกระทบต่อบริเวณที่ซ้อนทับกันของโฟกัสเซลล์ระหว่างการจับบนด้านที่ต่างกัน

เมื่อพิจารณาผลการคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน พบว่าจำนวนที่พบนั้นน้อยเมื่อเทียบกับการจับแบบคอนเคอร์เรนท์ เนื่องจากจำนวนด้านของวัตถุที่มีทิศทางขนานกันค่อนข้างน้อย อีกทั้งเงื่อนไขการพิจารณาเซตของการจับแบบขนานมีความเคร่งครัดสูง นอกจากนี้จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟการสลับนิ้วก็น้อยมาก ด้วยเหตุผลเดิมคือ

เงื่อนไขที่ใช้พิจารณาการจับแบบขนาน ดังนั้นจึงส่งผลต่อจำนวนองค์ประกอบที่ต่อเนื่องในกราฟซึ่งถือว่ามากเมื่อเทียบกับจำนวนจุดยอดในกราฟ

สำหรับกรณีที่พิจารณาการคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนต์ การจับแบบขนาน รวมถึงการจับด้วยสองนิ้ว จากผลการทดลองเห็นได้ชัดว่าการจับด้วยสองนิ้วมีบทบาทที่สำคัญในการสร้างความต่อเนื่องในกราฟ โดยเฉพาะระหว่างการจับแบบขนานด้วยกันเอง ที่สามารถกล่าวได้เช่นนี้เพราะจำนวนองค์ประกอบที่ต่อเนื่องกันในกราฟเป็นองค์ประกอบเดียวเมื่อนำการจับด้วยสองนิ้วเข้ามาพิจารณาพร้อมกับการจับแบบขนาน อีกทั้งการจับด้วยสองนิ้วยังมีส่วนในการเชื่อมโยงจุดยอดของการจับแบบคอนเคอร์เรนต์ด้วย เห็นได้จากผลการทดลองของวัตถุหลายเหลี่ยมที่มี 20 ด้าน นอกจากนี้ในการพิจารณาการจับทุกแบบพบว่าจำนวนการจับแบบคอนเคอร์เรนต์ที่มีจำนวนมากที่สุด ทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณการจับแบบคอนเคอร์เรนต์มากที่สุดด้วย เหตุที่การคำนวณการจับแบบคอนเคอร์เรนต์ใช้เวลานานเพราะการหาอินเตอร์เซกชันของโพลีเซลล์มีความซับซ้อนสูง เมื่อเทียบกับการหาเซต และอินเตอร์เซกชันของเซตสำหรับการจับแบบอื่น

โดยสรุปแล้วผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าการจับที่ควรให้ความสนใจมากที่สุดคือการจับแบบคอนเคอร์เรนต์ เนื่องจากได้กราฟการสลับนิ้วที่ถือได้ว่ามีความสมบูรณ์สูง ส่งผลให้การเปลี่ยนการจับแบบหนึ่งให้เป็นการจับอีกแบบบนด้านที่ต่างกันมีโอกาสเกิดขึ้นได้สูง แต่มีผลกระทบคือ เวลาที่ใช้ในการคำนวณสูงตามไปด้วย สำหรับการจับแบบขนานถือว่ามีบทบาทน้อยที่สุดด้วยข้อจำกัดที่เคร่งครัดทำให้ความสมบูรณ์ของกราฟการสลับนิ้วน้อยกว่าการจับแบบอื่น นอกจากการจับด้วยสามนิ้ว การจับด้วยสองนิ้วถือว่ามีความสำคัญในฐานะที่เป็นตัวเชื่อมโยงความต่อเนื่องในกราฟโดยเฉพาะในกรณีที่น่าการจับด้วยสองนิ้วมาพิจารณาร่วมกับการจับแบบขนาน จึงไม่ควรละความสนใจการจับประเภทนี้

สรุปการวิจัย ข้อเสนอแนะ และงานวิจัยในอนาคต

6.1 สรุปการวิจัย

ในยุคปัจจุบันการนำหุ่นยนต์มาใช้งานแทนมนุษย์เป็นที่แพร่หลาย เราสามารถพบเห็นในงานอุตสาหกรรมต่าง ๆ เช่น การประกอบรถยนต์ การประกอบเครื่องใช้ไฟฟ้า เป็นต้น โดยทั่วไปความสามารถของหุ่นยนต์เหล่านี้ อาศัยการโปรแกรมข้อต่อให้อยู่ในตำแหน่งที่กำหนดไว้ เมื่อเปรียบเทียบกับความสามารถของมนุษย์ในการหยิบจับสิ่งของในชีวิตประจำวัน ยังถือว่าห่างไกลกันมาก ความพยายามของนักวิจัยที่จะทำให้หุ่นยนต์มีความสามารถในการจัดวัตถุ เริ่มจากงานใช้หุ่นยนต์สอดวัตถุลงช่อง (peg-in-hole) [22], [23] มนุษย์เราแก้ปัญหานี้ได้อย่างง่ายดาย แต่เป็นเรื่องตรงข้ามสำหรับหุ่นยนต์ งานวิจัยด้านการจัดวัตถุในมือหุ่นยนต์มีเนื้อหาหลักซึ่งประกอบไปด้วยงานวิจัยส่วนย่อย ๆ ส่วนที่ได้รับความสนใจมากคือเรื่องของจลนศาสตร์และพลศาสตร์ที่เกี่ยวกับการจับ งานวิจัยด้านจลนศาสตร์ของการจับครอบคลุมถึงความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของข้อต่อนิ้วและการเคลื่อนที่ของนิ้ว และความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของนิ้วและผิวสัมผัส [24] เมื่อกล่าวถึงงานวิจัยด้านจลนศาสตร์ มักจะสมมติให้มือหุ่นยนต์สามารถควบคุมการเคลื่อนที่ของข้อต่อเพื่อให้อยู่ในตำแหน่งที่ต้องการได้ แต่การที่ข้อต่อจะเคลื่อนที่ได้นั้นก็เกิดจากการออกแรงหรือแรงบิดที่ข้อต่อ งานวิจัยด้านพลศาสตร์ (dynamics) [25] จึงเข้ามามีส่วนในการคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของข้อต่อ เมื่อได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ของข้อต่อ ปัญหาที่เกิดควบคู่กันมาคือ ต้องออกแรงเท่าไรข้อต่อถึงจะเคลื่อนที่ได้ตามต้องการ งานวิจัยด้านการควบคุม (control) [26] จึงถูกนำมาใช้ในการควบคุมแรงหรือแรงบิดที่ข้อต่อ เพื่อกำหนดตำแหน่งในการเคลื่อนที่และแรงของนิ้วที่กระทำต่อสิ่งแวดล้อม ถึงแม้จลนศาสตร์และพลศาสตร์เกี่ยวกับการจับจะเป็นส่วนที่จำเป็นในการจัดวัตถุในมือ การจัดวัตถุในมือที่มีประสิทธิภาพและเป็นไปตามความต้องการ จะเกิดขึ้นได้ยังต้องอาศัยการวางแผนในระดับบน อันได้แก่การวางแผนเพื่อหาตำแหน่งจับที่มีเสถียรภาพ ในปัจจุบันงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวางแผนเพื่อหาตำแหน่งจับถือว่ายังได้รับความสนใจน้อย เมื่อเทียบกับงานวิจัยส่วนอื่นที่เกี่ยวกับการจัดวัตถุในมือ วิทยานิพนธ์นี้จึงมุ่งนำเสนอประเด็นนี้เป็นหลัก โดยพิจารณาการจับที่มีความสามารถในการต้านทานการรบกวนจากแรงภายนอก หรือเรียกว่าการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์นั่นเอง วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอวิธีการคำนวณหาลำดับการเปลี่ยนคอนฟิกูเรชันของการจับบนด้านที่ต่างกันของวัตถุหลายเหลี่ยมด้วยมือหุ่นยนต์ที่มีสี่นิ้ว โดย

อาศัยโครงสร้างที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์คือโครงสร้างกราฟการสลับนิว เพื่อใช้ในการค้นหาลำดับในการเปลี่ยนตำแหน่งของนิวที่คงสภาพการจับที่มีคุณสมบัติฟอร์ชโคลสเซอร์อยู่ตลอด และได้ทำการทดลองวิธีที่นำเสนอด้วยการจำลองการทดลอง

ในบทที่ 3 และบทที่ 4 ของวิทยานิพนธ์ได้ทำการนำเสนอวิธีการคำนวณกราฟการสลับนิวด้วยการคำนวณทางเรขาคณิต แต่ละจุดยอดในกราฟบ่งบอกถึงเซตของการจับบนด้านที่ต่าง ๆ กัน แสดงความสามารถในการจัดวางนิวระหว่างการจัดที่ถูกแทนด้วยจุดยอดเดียวกันโดยอาศัยข้อดีของบริเวณสัมผัสอิสระ และเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดบ่งบอกถึงความสามารถในการสลับนิวระหว่างการจัดที่แทนด้วยจุดยอดสองจุดที่มีเส้นเชื่อม วิทยานิพนธ์นี้ให้ความสนใจการจับสามประเภทคือ การจับแบบคอนเคอร์เรนต์ การจับแบบขนาน และการจับด้วยสองนิว ปัญหาของการคำนวณกราฟการสลับนิวสำหรับการจับแบบคอนเคอร์เรนต์และการจับด้วยสองนิว สามารถทำให้ง่ายขึ้นด้วยการระบุคอนฟิกูเรชันการจับในรูปของจุดบนระนาบ ส่งผลให้เซตของการจับเป็นรูปหลายเหลี่ยมคือโพลีกอนนั่นเอง การนำโพลีกอนมาใช้ในการคำนวณเซตของการจับมีข้อได้เปรียบตรงที่เซตของการจับบนด้านที่ต่างกันอยู่ในปริภูมิเดียวกัน การคำนวณการซ้อนทับกันของเซตการจับแบบคอนเคอร์เรนต์หรือการจับด้วยสองนิวจึงสามารถหาได้จากการคำนวณการตัดกันของโพลีกอนได้โดยตรง และด้วยคุณสมบัติความต่อเนื่องในโพลีกอน ทำให้การจัดวางนิวเพื่อเปลี่ยนการจับในโพลีกอนเดียวกันสามารถเกิดขึ้นได้เสมอ ในขณะที่การจับแบบขนานถูกระบุด้วยตำแหน่งบนด้าน การคำนวณการจับแบบขนานจึงอยู่ในปริภูมิสามมิติที่มีระยะห่างจากจุดเริ่มต้นของด้านทั้งสามเป็นองค์ประกอบ อีกทั้งในการคำนวณการซ้อนทับกันของเซตการจับเพื่อหาการสลับนิวยังต้องทำการกำจัดตัวแปรของด้านที่ต่างกันซึ่งมีความซับซ้อนในการคำนวณสูง ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงเสนอวิธีการคำนวณการจับแบบขนานด้วยวิธีที่ทำการพิจารณาบางกรณีของการจับแบบขนาน เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณบนปริภูมิสามมิติโดยตรง แต่วิธีที่นำเสนอใช้เงื่อนไขที่มีความเคร่งครัดสูง ทำให้จำนวนการจับแบบขนานและการสลับนิวบนสามด้านที่ต่างกันมีจำนวนน้อย นั่นคือจุดยอดและเส้นเชื่อมในกราฟการสลับนิวสำหรับการจับแบบขนานมีจำนวนน้อย ทำให้กราฟการสลับนิวสำหรับการจับแบบขนานแบ่งแยกออกเป็นหลายองค์ประกอบ ถึงกระนั้นก็ตามปัญหาเรื่ององค์ประกอบในกราฟสามารถแก้ด้วยการนำการจับด้วยสองนิวมาพิจารณาพร้อมกับกรจับแบบขนาน การคำนวณกราฟการสลับนิวที่เสร็จสมบูรณ์ทำให้เราสามารถทำการหาลำดับการเปลี่ยนตำแหน่งของนิวเพื่อเปลี่ยนการจับเริ่มต้นไปเป็นการจับเป้าหมายได้ด้วยการค้นหาเส้นทางในกราฟการสลับนิว

งานวิจัยในวิทยานิพนธ์นี้มีความเกี่ยวข้องอย่างมากกับงานวิจัยด้านอื่นๆ ของการจัดวัตถุในมือ เพื่อประโยชน์ในการพิจารณาข้อจำกัด และการพัฒนาต่อยอด จึงสมควรที่จะกล่าวถึงงานวิจัยที่สนับสนุนและรองรับวิทยานิพนธ์นี้คือ

1. งานวิจัยเกี่ยวกับการจับที่มีคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์ ถือเป็นพื้นฐานสำคัญของวิทยานิพนธ์นี้ เพราะวิทยานิพนธ์นี้ให้ความสนใจในการหาลำดับการเปลี่ยนตำแหน่งของนิ้ว โดยในขณะที่ทำการเปลี่ยนตำแหน่งนิ้วการจับวัตถุจะต้องมีเสถียรภาพอยู่ตลอดเวลา ซึ่งการจับที่มีเสถียรภาพที่วิทยานิพนธ์นี้นำมาพิจารณาคือการจับที่มีคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์ดังกล่าวในงานวิจัย [5] เสนอเงื่อนไขสำหรับการจับวัตถุหลายเหลี่ยมด้วยสองนิ้ว และ [8] เสนอเงื่อนไขสำหรับการจับวัตถุหลายเหลี่ยมด้วยสามนิ้ว นอกจากนี้งานวิจัยสองงานนี้ [27] , [28] ได้ทำการเสนอวิธีการคำนวณการจับที่มีคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์และพอร์มโคลสเซอร์ด้วยการพิจารณาคอนเวกซ์ฮัลล์ (convex hull) ในปริภูมิของแรงและแรงบิด โดยอาศัยเงื่อนไขที่กล่าวไว้ใน [29] ว่า การจับที่มีคุณสมบัติพอร์ชโคลสเซอร์คือ การจับที่มีจุดกำเนิดอยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์ในปริภูมิของแรงและแรงบิดที่จุดสัมผัส ในงานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีการทดสอบจุดกำเนิดอยู่ในคอนเวกซ์ฮัลล์หรือไม่ โดยวิธีที่นำเสนอคือการเชื่อมคอนเวกซ์ฮัลล์ด้วยระนาบที่ผ่านจุดกำเนิดเพื่อแปลงปัญหาลงไปเป็นปริภูมิที่มีมิติต่ำกว่า ซึ่งข้อได้เปรียบของการคำนวณการจับด้วยวิธีนี้คือ การพิจารณาการจับโดยไม่ขึ้นกับข้อกำหนดของจำนวนนิ้ว แต่ข้อจำกัดคือการคำนวณคอนเวกซ์ฮัลล์บนปริภูมิหลายมิติที่มีความซับซ้อน และข้อกำหนดด้านจำนวนนิ้วของมือหุ่นยนต์ในปัจจุบัน การพิจารณาการจับโดยอาศัยเงื่อนไขตามงานวิจัย [5] , [8] จึงเพียงพอสำหรับงานในวิทยานิพนธ์นี้

2. งานวิจัยด้านจลนศาสตร์ งานวิจัยทางด้านนี้ถือเป็นงานวิจัยที่มีความสำคัญเนื่องจากจลนศาสตร์ของข้อต่อนิ้ว และจลนศาสตร์ของผิวสัมผัส ถือว่าเป็นข้อกำหนดในการคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเคลื่อนที่ของนิ้วและวัตถุ เพื่อให้ได้การเคลื่อนที่ของนิ้วให้อยู่ในตำแหน่งที่ต้องการบนผิววัตถุ นอกจากนี้ข้อกำหนดทางจลนศาสตร์ของนิ้วที่ต้องคำนึงถึงในการเคลื่อนที่ของนิ้วคือ บริเวณทำงานของนิ้ว การหลีกเลี่ยงการชนหรือไขว้กันของนิ้ว และในกระบวนการหมุนนิ้ว ดังงานวิจัย [30] ได้เสนอการคำนวณความเป็นไปในการที่มือหุ่นยนต์จะสามารถทำการจับวัตถุในคอนฟิกูเรชันที่ต้องการโดยสอดคล้องกับข้อกำหนดทางจลนศาสตร์ และจลนศาสตร์ของผิวสัมผัสยังถูกนำมาใช้เพื่อการคำนวณการเคลื่อนที่ของนิ้วด้วยการหมุนนิ้วและตำแหน่งที่เปลี่ยนไปของจุดสัมผัสดังแสดงใน [24] , [20]

3. งานวิจัยด้านพลศาสตร์ โดยมากการคำนวณทางด้านจลนศาสตร์มักจะกำหนดให้ข้อต่อนิ้วสามารถเคลื่อนที่ได้ตามต้องการในสภาวะแวดล้อมจริง งานวิจัยด้านพลศาสตร์จึงต้องนำมาใช้ในการอธิบายการเคลื่อนของนิ้ว รวมถึงการออกแรงบิดที่ข้อต่อเพื่อให้นิ้วออกแรงหรือแรงบิดต่อวัตถุที่สอดคล้องกับข้อกำหนดของการจับ ดังนั้นงานวิจัยด้านนี้จึงมีความสัมพันธ์โดยตรงกับการหมุนนิ้วดังปรากฏใน [31] หรือการเลือนนิ้วใน [19], [32] นอกจากนี้สิ่งที่ต้องคำนึงคือการมีเสถียรภาพของการจับในระบบพลวัตซึ่งถูกเสนอไว้ในงานวิจัย [33]

4. งานวิจัยด้านระบบเสมือนสถิต (quasi-static) นอกจากการพิจารณาการเคลื่อนที่ของนิ้วด้วยระบบพลวัตแล้ว ระบบเสมือนสถิตยังสามารถนำมาใช้พิจารณาการเคลื่อนที่ของนิ้ว ไม่ว่าจะด้วยการหมุนนิ้ว หรือเลือนนิ้ว โดยเฉพาะการเลือนนิ้วพบว่าการที่จะทำให้นิ้วเกิดการเลือนบนผิววัตถุได้เมื่อแนวแรงวางตัวอยู่ที่ขอบของกรวยเสียดทาน แต่เมื่อเกิดการเคลื่อนที่สิ่งที่เปลี่ยนแปลงคือสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน โดยต้องนำค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์มาใช้ในการคำนวณ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิต ดังนั้นกรวยเสียดทานจลน์จึงมีขนาดเล็กกว่า ส่งผลให้มีช่วงจังหวะหนึ่งที่แนวแรงอยู่นอกกรวยเสียดทานจลน์ งานวิจัยด้านนี้จึงถือว่าช่วงจังหวะดังกล่าวนี้เป็นช่วงสั้น ๆ และหลังจากนั้นระบบสามารถปรับตัวเข้าสู่ความมีเสถียรภาพด้วยการเคลื่อนที่ของนิ้วที่ความเร็วต่ำและคงที่ ทำให้การพิจารณาการจับที่มีเสถียรภาพสามารถทำได้เสมือนอยู่ในระบบสถิต งานวิจัยด้านระบบเสมือนสถิตถูกเสนอใน [34] และการวางแผนการเคลื่อนที่ของนิ้วในระบบเสมือนสถิตปรากฏใน [35]

5. งานวิจัยเกี่ยวกับมือหุ่นยนต์ งานวิจัยด้านนี้ถือเป็นสิ่งที่ขาดไม่ได้หากเราต้องการให้หุ่นยนต์ทำการจับหรือจัดการกับวัตถุในมือ โดยมีความสัมพันธ์โดยตรงกับงานวิจัยด้านการจัดวัตถุในมือในฐานะที่รูปจำลองของมือหุ่นยนต์ถูกนำมาใช้ในการศึกษาทางจลนศาสตร์ของนิ้ว จลศาสตร์ของผิวสัมผัส รวมถึงบริเวณทำงานของมือหุ่นยนต์ด้วย ยกตัวอย่าง งานวิจัย [36] ได้นำมือดีแอลอาร์สองมาศึกษาท่าทางการจับวัตถุ และงานวิจัย [37], [38] นำมือยูทาห์และเอ็มไอทีมาใช้ในการจัดวัตถุ

6. การคำนวณทางเรขาคณิต ถือเป็นพื้นฐานการคำนวณที่ใช้ในวิทยาพจนานี้ เนื่องจากการคำนวณทางเรขาคณิตถูกนำมาใช้การคำนวณทางด้านต่าง ๆ เช่น เวกเตอร์ มุม การตัดกันของส่วนของเส้นตรง การตัดกันของวัตถุหลายเหลี่ยม (รูปทรงของโฟกัสเซลล์เป็นวัตถุหลายเหลี่ยม) เป็นต้น ดังแสดงใน [39]

6.2 ข้อเสนอแนะ

ในหัวข้อนี้จะขอกล่าวถึงแนวทางการแก้ไขข้อจำกัดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในวิทยานิพนธ์ ข้อจำกัดที่เห็นได้ชัดเจนจากการทดลองคือ ข้อจำกัดทางเงื่อนไขของการจับแบบขนานมีความเคร่งครัดสูง ส่งผลให้จุดยอดและเส้นเชื่อมในกราฟที่ได้จากการคำนวณการจับแบบขนานมีจำนวนน้อย ดังนั้นสิ่งที่ควรจะต้องทำการแก้ไขเป็นจุดหลักคือการคำนวณกราฟการสลับนิ้วสำหรับการจับแบบขนาน ซึ่งสามารถทำได้ด้วยการคำนวณหาเซตของการจับแบบขนานโดยตรง เพื่อให้การคำนวณครอบคลุมการจับแบบขนานทุกกรณีที่เป็นไปได้

แม้การคำนวณการจับแบบคอนเคอร์เรนท์จะครอบคลุมกรณีทั้งหมด แต่จากการทดลองพบว่าใช้เวลาสูงมากเมื่อเทียบกับการจับประเภทอื่น เนื่องจากความซับซ้อนในปัญหาการคำนวณการตัดกันของไฟกัสเซลล์ ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยอาศัยวิธีการสุ่มจุดบนระนาบ (วิธีนี้ได้นำเสนอไว้ในงานวิจัยการวางแผนการจับวัตถุทรงหลายหน้าที่ได้รับการตีพิมพ์) หากไฟกัสเซลล์ใดมีจุดนี้อยู่ภายใน นั้นหมายความว่าไฟกัสเซลล์นั้น ๆ มีส่วนที่ซ้อนทับกันแน่นอน ถึงแม้การแก้ปัญหาด้วยการสุ่มจุดจะช่วยลดปัญหาและเวลาการคำนวณการตัดกันของไฟกัสเซลล์ได้ แต่การสุ่มจุดที่ไม่ครอบคลุมพื้นที่บนระนาบอาจทำให้ได้การจับแบบคอนเคอร์เรนท์ที่ไม่ครบทุกกรณี ดังนั้นการศึกษาเกี่ยวกับการสุ่มจึงเป็นสิ่งที่ควรทำการศึกษาและวิจัยเพิ่มเติมหากต้องการนำวิธีดังกล่าวมาใช้

6.3 งานวิจัยในอนาคต

งานวิจัยในอนาคตที่น่าสนใจคือ การเพิ่มข้อกำหนดในการคั่นในกราฟ เช่น ข้อกำหนดทางจลนศาสตร์ของนิ้วและผิวสัมผัส บริเวณทำงานของนิ้ว เป็นต้น เนื่องจากสิ่งที่ได้จากการคั่นในกราฟสลับนิ้วคือ เซตของการจับที่เป็นไปได้ ดังนั้นการเลือกการจับที่ดีที่สุดในแต่ละคำตอบตามข้อกำหนดต่าง ๆ จึงเป็นประเด็นที่ไม่ควรละความสนใจ เช่น การจับที่มีบริเวณสัมผัสอิสระที่กว้างที่สุด [5] , [8] การจับที่ออกแรงน้อยที่สุดเพื่อต้านทานแรงกระทำจากภายนอก [40] การจับที่มีจุดเซนทรอยด์ (centroid) ของจุดสัมผัสใกล้กับจุดศูนย์กลางของวัตถุมากที่สุด [8] , [28] เพื่อลดผลกระทบจากแรงโน้มถ่วงและแรงเฉื่อยที่เกิดจากการเคลื่อนของมือหุ่นยนต์ และอีกประเด็นหนึ่ง ที่ควรทำการวิจัยต่อยอดคือการหาวิธีการคำนวณหาลำดับการเปลี่ยนคอนฟิกูเรชันสำหรับวัตถุชนิดอื่น ๆ เช่น วัตถุทรงหลายหน้า วัตถุผิวโค้ง เป็นต้น

รายการอ้างอิง

- [1] S. Jacobsen, E. Iversen, D. Knutti, R. Johnson, and K. Bigger. Design of the Utah/MIT Dextrous Hand. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 96-102, 1986.
- [2] C.S. Lovchik and M.A. Diftler. 1999. The Robonaut hand: a dexterous robot hand for space. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 907-912, 1999.
- [3] J. Butterfass, M. Grebenstein, H. Liu, and G. Hirzinger. DLR-Hand II: Next Generation of a Dextrous Robot Hand. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Seoul, 2001.
- [4] I. Yamano, K. Takemura, and T. Maeno. Development of a Robot Finger for Five-fingered Hand using Ultrasonic Motors. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2003.
- [5] V-D. Nguyen. Construction force-closure grasps. International Journal of Robotics Research 3(June 1988): 3-16.
- [6] Elon Rimon and Joel Burdick. On Force and Form Closure For Multiple Finger Grasps. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1795-1800, April 1996.
- [7] X. Markenscoff, L. Ni, and C.H. Papadimitriou. The Geometry of Grasping. International Journal of Robotics Research 1(February 1990):61-74.
- [8] J. Ponce and B. Faverjon. On computing three-finger force-closure grasps of polygonal objects. IEEE Transaction on Robotics and Automation 6(December 1995):868-881.
- [9] J. Ponce, S. Sullivan, J.-D. Boissonnat, and J.-P. Merlet. On characterizing and computing three- and four-finger force-closure grasps of polyhedral objects. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 821-827, May 1993.
- [10] J. Ponce, S. Sullivan, A. Sudsang, J-D. Boissonnat, and J-P. Merlet. On computing four-finger equilibrium and force-closure grasps of polyhedral objects. International Journal of Robotics Research 1(February 1997):11-35.
- [11] A. Sudsang and J. Ponce. New techniques for computing four-finger force-closure grasps of polyhedral objects. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1995.

- [12] J.W. Hong, G. Lafferriere, B. Mishra, and X.L. Tang. Fine manipulation with multifinger hand. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1990.
- [13] L. Han and J.C. Trinkle. Dexterous manipulation by rolling and finger gaiting. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1998.
- [14] T. Omata and K. Nagata. Planning reorientation of an object with a multifingered hand. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1994.
- [15] A. Bicchi and V. Kumar. Robotic grasping and contact: A review. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 2000.
- [16] A. Okamura, N. Smaby, and M. Cutkosky. An overview of manipulation. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 2000.
- [17] F. P. Bowden and D. Tabor. Friction and lubrication. Oxford: Oxford University Press, 1954.
- [18] J. L. Meriam, L. G. Kraige, and William J., III Palm. Engineering Mechanics, Statics. New York: Wiley Text Books, 2001.
- [19] Arlene A. Cole, Ping Hsu, and S. Shankar Sastry. Dynamic Control of Sliding by Robot Hands for Regrasping. IEEE Transaction on Robotics and Automation 1(February 1992):42-52.
- [20] A. Bicchi and A. Marigo. Rolling contacts and dexterous manipulation. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 2000.
- [21] Kurt Mehlhorn and Stefan Naher. Leda: A Platform for Combinatorial and Computing. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [22] Karl Kleinmann, Dagmar M. Bettenhausen, and Matthias Seitz. A Modular Approach for Solving the Peg-in-hole Problem with a multifingered gripper. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. 1995.
- [23] Byoung-Ho Kim, Sang-Rok Oh, Byung-Ju Yi, Il Hong Suh, and Wan Kyun Chung. Analysis of Compliance Characteristic for Effective Multi-fingered Robotic Peg-In-Hole Task. IEEE Int. Conf. On Industrial Electronics, Control, and Instrumentation. 2000.

- [24] Jianfeng Li, Yuru Zhang, and Qixian Zhang. Kinematic Algorithm of Multifingered Manipulation with Rolling Contact. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems. 2000.
- [25] Joseph C. Chan and Yun-hui Liu. Simulating Dexterous Manipulation of a Multifingered Robot Hand Based on a Unified Dynamic Model. . IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1999.
- [26] A. De Luca and R. Mattone. Modeling and Control Alternatives for Robots in Dynamic Cooperation. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1995.
- [27] Yun-Hui Liu. Computing n-Finger Force-Closure Grasps on Polygonal Objects. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1998.
- [28] Dan Ding, Yan-Hui Liu, and Shuguo Wang. Computation of 3-D Form-Closure Grasps. IEEE Transaction on Robotics and Automation 4(August 2001):515-522.
- [29] B. Mishra, J. T. Schwartz, and M. Sharir. On the Existence and Synthesis of Multifinger Positive Grips. Algorithmica 4(November 1987):541-558.
- [30] Yisheng Guan and Hong Zhang. Kinematic Graspability of a 2D Multifingered Hand. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. 2000.
- [31] Nilanjan Sarkar, Xiaoping Yun, and Vijay Kumar. Dynamic Control of 3-D Rolling Contacts in Two-Arm Manipulation. IEEE Transaction on Robotics and Automation 3(June 1997):364-376.
- [32] Xin-Zhi Zheng, Ryo Nakashima, and Tsuneo Yoshikawa. On Dynamic Control of Finger Sliding and Object Motion in Manipulation with Multifingered Hands. IEEE Transaction on Robotics and Automation 5(October 2000):469-481.
- [33] Y. F. Li S.K. Tso, and Q. Meng. Grasping Force Measurement for Dynamic Grasp Stability Assessment. IEEE Transaction on Robotics and Automation 5(October 1998):1294-1299.
- [34] J. C. Trinkle. A Quasi-Static Analysis of Dexterous Manipulation with Sliding and Rolling Contacts. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. 1989.
- [35] Moez Cherif and Kamal K. Gupta. Planning Quasi-Static Motions for Re-configuring Objects with a Multi-fingered Robotic Hand. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. 1997.

- [36] Ch. Borst, M. Fischer, and G. Hirzinger. Calculating Hand Configurations for Precision and Pinch Grasps. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems. 2002.
- [37] Olac Fuentes and Randal C. Nelson. Experiments on Dextrous Manipulation without Prior Object Models. IEEE Int. Symposium on Intelligent Control. 1996
- [38] Paul Michelman. Precision Object Manipulation with a Multifingered Robot Hand. IEEE Transaction on Robotics and Automation 1(February 1998):105-113.
- [39] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. Computational Geometry. Berlin: Springer, 1997.
- [40] L. Mangialardi, G. Mantriota, and A. Trentadue. A Three-dimensional Criterion for the Determination of Optimal Grip Points. Robot. Comput. Integrat. Manufact. 2(1996): 157-167.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย ธนธร พ่อคำ เกิดเมื่อวันที่ 30 ธันวาคม พ.ศ.2523 ที่กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ.) สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จากภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2545 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม.) สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2545